

Beitrag zur Berechnung von nachgiebig gelagerten Behältertragwerken unter seismischen Einwirkungen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

an der Fakultät Bauingenieurwesen

der

Bauhaus-Universität Weimar

vorgelegt von

Jörg Habenberger

aus Naumburg/Saale

Weimar

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. G. Burkhardt

Prof. Dr.-Ing. W. Wunderlich

Dr.-Ing. J. Schwarz

Tag der Disputation: 17.12.2001

Kurzfassung: Beitrag zur Berechnung von nachgiebig gelagerten Behältertragwerken unter seismischen Einwirkungen

In der Baupraxis werden zur Erfassung der bei seismischen Einwirkungen auftretenden Interaktionseffekte zwischen Behältertragwerk, Flüssigkeit und Untergrund oftmals sogenannte Ingenieurverfahren eingesetzt. Diese sind durch die ihnen zugrundeliegenden einfachen mechanischen Modelle und die Anwendung der Substrukturmethode zur Berücksichtigung der Behälter-Boden-Interaktion gekennzeichnet. Die modale Analyse der Interaktionsschwingung von Flüssigkeit und Behälterschale wird in der Arbeit durch die Integralgleichungsmethode behandelt. Diese wird sowohl auf die ideale Flüssigkeit als auch zur Untersuchung des Einflusses der Flüssigkeitskompressibilität angewendet. Es wird ein Modell zur Berücksichtigung der Flüssigkeitsviskosität entwickelt und daraus Dämpfungsfaktoren für die Schwingung der Flüssigkeitsoberfläche abgeleitet. Für die Behältergründung werden in Abhängigkeit von der Gründungsflexibilität Impedanzfunktionen bestimmt. Aus dem Gesamtsystem von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund werden Dämpfungsmaße und Frequenzänderungen ermittelt, die für die Anwendung in einem normentauglichen Berechnungskonzept bestimmt sind.

Abstract: Contribution to the analysis of flexibly supported liquid storage tanks under earthquake excitation

In order to take into account effects of interaction between storage tank, liquid and soil under the influence of a seismic impact an approach often taken in practical construction analysis is the use of so-called engineering methods. These are based on simple mechanical models and take advantage of the sub-structure method to consider structure-soil-interaction. In the paper, modal analysis of the interaction motion of liquid and tank shell is dealt with by the integral equation method. This is applied for examination of the behaviour of the ideal liquid as well as the influence of the compressibility of the liquid. A model is developed in order to take into account the viscosity of the liquid from which damping factors for the motion of the liquid surface are derived. Impedance functions are defined to consider the foundation of the tank depending on the flexibility of the foundation. Damping values and changes in frequency are calculated from the complete system consisting of storage tank, liquid and soil, which are intended for the application in calculation concepts suitable for official design specifications.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur Planung von Ingenieurbauten der Bauhaus-Universität Weimar.

Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. G. Burkhardt und Herrn Dr.-Ing. J. Schwarz für die langjährige Unterstützung und Betreuung der Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Wunderlich vom Lehrstuhl für Statik der TU München möchte ich für sein Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Koreferats danken.

Besonders erwähnen möchte ich die äußerst angenehme Zusammenarbeit mit Herrn Dr.-Ing. Christian Seiler vom Lehrstuhl für Statik der TU München im Rahmen des DFG-Forschungsprojekts "Behälter- und Silotragwerke unter seismischen Einwirkungen".

Schließlich möchte ich mich bei allen Kollegen der Professur Planung von Ingenieurbauten für die wertvolle fachliche und persönliche Unterstützung bedanken.

Weimar, Januar 2002

Jörg Habenberger

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemsituation	1
1.2	Kurzbeschreibung des derzeitigen Wissensstandes	2
1.3	Zielstellung und Gliederung der Arbeit	5
2	Interaktion von Behälter und Flüssigkeit	11
2.1	Koordinatensystem und Bezeichnungen	11
2.2	Interaktion von Behälter und inkompressibler reibungsfreier Flüssigkeit	12
2.2.1	Potentialgleichung der Flüssigkeit	12
2.2.2	Lösung für die Potentialgleichung	13
2.2.3	Differentialgleichung der Zylinderschale	16
2.2.4	Lösung für die Zylinderschale	17
2.2.5	Gleichungen für Zylinderschale und Flüssigkeit	20
2.2.6	Modale Analyse des Zylinderschale-Flüssigkeit-Systems	21
2.3	Parameteruntersuchung	27
2.3.1	Ergebnisse für den 1. Biegemode	27
2.3.2	Ergebnisse für höhere Biegemodes	34
2.3.3	Berücksichtigung der Schalenmasse	39
2.4	Interaktion von Behälter und kompressibler reibungsfreier Flüssigkeit	43
2.4.1	Gleichung der kompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit	43
2.4.2	Lösung für die Gleichung der Flüssigkeit	44
2.4.3	Berechnungsergebnisse	46
2.5	Interaktion von Behälter und inkompressibler reibungsbehafteter Flüssigkeit	46
2.5.1	Gleichung der inkompressiblen reibungsbehafteten Flüssigkeit	47
2.5.2	Lösung für die eindimensionale Scherströmung	48
2.5.3	Tangentiale Strömungsgeschwindigkeit an den Flüssigkeitsrändern	50
2.5.4	Dämpfung der Schwingungen des Behälter-Flüssigkeit-Systems	50
2.5.5	Dämpfung der Schwappschwingung	51
2.6	Ersatzsystem für das Behälter-Flüssigkeit-Kontinuum	55
2.6.1	Modale Berechnung	55
2.6.2	Kenngrößen für das Ersatzsystem	56
2.7	Zusammenfassung	57
3	Interaktion von Fundament und Untergrund	61
3.1	Gleichungen für den linear-elastischen Halbraum	61
3.2	Axialsymmetrische schlaaffe Kreisflächenlast	63
3.2.1	Statische Belastung	63
3.2.2	Dynamische Belastung	63
3.3	Antimetrische schlaaffe Kreisflächenlast	63

3.3.1	Statische Belastung	63
3.3.2	Dynamische Belastung	64
3.4	Starres Kreisfundament	67
3.4.1	Vertikale Anregung	67
3.4.2	Horizontale Anregung	69
3.4.3	Anregung durch ein Moment	70
3.4.4	Kopplung von horizontaler und Kippbewegung	72
3.5	Flexibles Kreisfundament	73
3.5.1	Vertikale Anregung	73
3.5.2	Anregung durch ein Moment	76
3.6	Impedanzfunktionen für flexible Behältergründungen	80
3.7	Zusammenfassung	83
4	Gesamtsystem von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund	87
4.1	Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems	87
4.1.1	Bildung des Gesamtsystems nach der Substrukturmethode	87
4.1.2	Vertikale Anregung	87
4.1.3	Horizontale Anregung	89
4.2	Vergleich mit numerischen Untersuchungen	95
4.2.1	Ermittlung der dynamischen Kenngrößen	95
4.2.2	Vergleich der dynamischen Kenngrößen	99
4.2.3	Berechnungsbeispiele für einen Erdbebenzeitverlauf	102
4.3	Zusammenfassung	103
5	Äquivalentes Ersatzsystem	109
5.1	Ableitung des äquivalenten Ersatzsystems	109
5.2	Dynamische Kenngrößen des äquivalenten Ersatzsystems	112
5.2.1	Vertikale Anregung	112
5.2.2	Horizontale Anregung	114
5.3	Ermittlung der Antwortgrößen mit dem äquivalenten Ersatzsystem	115
5.3.1	Ermittlung der maximalen modalen Antwortgrößen	115
5.3.2	Überlagerung der maximalen modalen Antwortgrößen	116
5.3.3	Bemessungsschnittgrößen	118
5.4	Bemessung der Behälterschale	120
5.5	Anwendungsbeispiel	122
5.6	Zusammenfassung	126
6	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	129
A	Spezielle Lösungen für das Flüssigkeitspotential	133
A.1	Vorbemerkungen	133
A.2	Tafeln	134
B	Einflußfunktion der Zylinderschale	149
B.1	Axialsymmetrische Belastung	149
B.1.1	Randbedingungen	150
B.1.2	Ansatz für die Verformungen	152
B.1.3	Bestimmung der unbekannten Koeffizienten des Ansatzes	152
B.1.4	Bestimmung der Übergangsschnittgrößen	153
B.2	Antimetrische Belastung	153
B.2.1	Randbedingungen	155
B.2.2	Ansatz für die Verformungen	158
B.2.3	Bestimmung der unbekannten Koeffizienten des Ansatzes	159
B.2.4	Bestimmung der Übergangsschnittgrößen	161

Bezeichnungen	163
Literaturverzeichnis	169

1 Einleitung

1.1 Problemsituation

Flüssigkeitsbehälter dienen der vorübergehenden oder langzeitigen Lagerung von flüssigen Gütern wie z.B. Trink- und Brauchwasser, Abwässern und Klärschlämmen, Mineralölen oder verflüssigten Gasen. Für das Behältertragwerk werden vorzugsweise rotationssymmetrische Konstruktionen verwendet. Sie ermöglichen eine leichtere Herstellung und eine günstigere Lastabtragung als eckig geformte Behälter. Die Speichervolumen können bis zu $100\,000\text{ m}^3$ betragen.

Flüssigkeitsbehälter werden vorwiegend aus metallischen Werkstoffen oder Beton hergestellt, seltener aus Holz, Kunststoffen oder natürlichen bzw. künstlichen Steinen.

Die wesentlichste, nutzungsbedingte Anforderung an Flüssigkeitsbehälter ist ihre Dichtheit. Diese ist entweder durch die Werkstoffeigenschaften des Behältertragwerks gegeben (z.B. metallische Ölbehälter), oder sie muß durch besondere Auskleidungen (z.B. Kunststoff- oder Metall-Liner) erzielt werden. Detaillierte Angaben zur Konstruktion und Ausführung von Flüssigkeitsbehältern sind z.B. in den Büchern von Hampe [25, 26] enthalten.

Als Lagerflüssigkeiten können giftige, brennbare oder auch explosive Stoffe auftreten. Häufig sind Flüssigkeitsbehälter auch Bestandteile von Anlagen, welche eine besondere Bedeutung für die Versorgung der Bevölkerung besitzen. Eine zu geringe Sicherheit hinsichtlich des Einsturzes und des Verlustes der Flüssigkeit kann deshalb schwerwiegende Folgen für den Menschen und die Natur nach sich ziehen. Diese Behälter besitzen demnach ein besonders hohes Risikopotential. Bei ihnen muß auch unter extremen Einwirkungen die Tragfähigkeit und die Gebrauchstauglichkeit gewährleistet sein. In erdbebengefährdeten Gebieten ist deshalb auch die Berücksichtigung von seismischen Einwirkungen bei den rechnerischen Nachweisen dieser Behälter zu beachten.

Bei Erdbebenereignissen sind auch in jüngster Zeit immer wieder Schäden an Flüssigkeitsbehältern aufgetreten. Diese Schadensfälle verdeutlichen, daß die gegenwärtig in der Ingenieurpraxis angewandten Berechnungs- und Bemessungsverfahren zur Auslegung von Flüssigkeitsbehältern noch nicht in jedem Fall ausreichend sind [22].

Das Antwortverhalten unter Erdbeben wird maßgeblich durch die Interaktion von Behältertragwerk, Flüssigkeit und Untergrund bestimmt. Durch die gemeinsame Schwingung von Behälter und Flüssigkeit werden zusätzlich zum statischen Druck dynamische Druckzustände hervorgerufen. Die Interaktion mit dem Untergrund bewirkt eine Änderung der Resonanzfrequenz und eine zusätzliche Dämpfung (Abstrahlungsdämpfung) gegenüber dem starr gelagerten Behälter. Bei diesen Interaktionsvorgängen sind insbesondere die in Abb. 1.1 angegebenen Einflüsse von Bedeutung.

Für die rechnerische Erfassung dieses komplexen dynamischen Verhaltens können **numerische Berechnungsverfahren** angewendet werden. Die dabei verwendeten Berechnungsmodelle besitzen eine große Anzahl von Freiheitsgraden, so daß der Einsatz von Rechentechnik zwingend erforderlich ist. Trotz der immer leistungsfähigeren Rechenprogramme und -technik ist es zur Zeit jedoch noch nicht möglich, alle in Abb. 1.1 dargestellten Einflüsse auf die Interaktionsvorgänge zu berücksichtigen. Insbesondere ist auch die Erfassung von nichtlinearem Verhalten mit den numerischen Berechnungsverfahren sehr aufwendig.

- Unverankerte Behälter

beschrieben werden.

Interaktion von Behälter und Flüssigkeit

Starre Behälterwand Von Housner [33] wurde 1955 ein vereinfachtes Verfahren zur Bestimmung der dynamischen Flüssigkeitsdrücke in starren rechteckigen und zylindrischen Behältern veröffentlicht. Er zerlegte den Druck in einen impulsiven Anteil aus der gemeinsamen Bewegung von starrer Behälterwand und Flüssigkeit und einen konvektiven Anteil aus der Schwingung der freien Flüssigkeitsoberfläche. Mit diesem Modell konnten die Resultierenden der Flüssigkeitsdrücke und deren Angriffspunkte an der Behälterwand angegeben werden. Die abgeleiteten Ersatzgrößen erlaubten eine schnelle und genaue Berechnung der Beanspruchungen am Behälterfuß. Dieses Verfahren fand eine große Verbreitung in der Ingenieurpraxis. Epstein [12] verfeinerte das Verfahren von Housner und gab Kurven zur Bestimmung der Ersatzgrößen an.

Flexible Behälterwand Aufgrund von Schadensfällen in den sechziger Jahren wurde erkannt, daß die bis dahin gültigen Verfahren keine ausreichend sichere Bemessung unter Erdbebenlasten erlauben. Die daraufhin durchgeführten experimentellen und theoretischen Untersuchungen zeigten, daß bei Behältern in Stahlbauweise auch die Flexibilität der Behälterwand in die Berechnung einbezogen werden muß, während für Stahlbeton- und Spannbetonbehälter die Annahme einer starren Wand oftmals gerechtfertigt ist.

Zur Bestimmung der Ersatzmassen verwendete Veletsos [70] die Eigenformen eines äquivalenten Biegeträgers als Eigenformen der Schale. Dadurch konnte das Schale-Flüssigkeit-System auf eine Reihe von entkoppelten Einfreiheitsgradschwingern zurückgeführt werden.

Luft [40] untersuchte 1984 die axialsymmetrischen Schwingungen von membrangestützten Spannbetonschalen. Als Eigenformen verwendete er näherungsweise cos-Funktionen.

Tang [67] und Seeber [60] wendeten das Galerkinsche Verfahren zur Lösung der Schalengleichungen an. Die Flüssigkeit wurde als zusätzliche Masse auf die Schale aufgebracht.

Tang [67] leitet in seiner Arbeit Ersatzgrößen für das Behälter-Flüssigkeit-System unter horizontaler, vertikaler und Kippanregung ab.

Fischer und Rammerstorfer [17] verwendeten zur Bestimmung der Schalenverschiebungen die Methode der Finiten Elemente. Die Flüssigkeit wird durch eine Erhöhung der Dichte der "trockenen" Schale berücksichtigt. Die Bestimmung der Eigenformen der Schale erfolgt iterativ. Diese Vorgehensweise wird auch in der derzeitigen Fassung des Eurocode 8, Part 4 [14] empfohlen.

Fischer gibt in [15] Lösungen für die Schwingungsgleichung der kompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit unter Berücksichtigung der Schwappbedingungen an der freien Flüssigkeitsoberfläche an.

Latz wendete in seiner Arbeit [38] die Randelementemethode zur Beschreibung der Flüssigkeit an. Die Behälterschale wird mit der Methode der Finiten Elemente berechnet.

Interaktion von Behälter und Untergrund

Veletsos wies 1984 darauf hin, daß durch die Interaktion mit einem nachgiebigen Untergrund eine Erhöhung der Dämpfung und eine Änderung der Resonanzfrequenz auftreten kann [71]. Die Aussagen beschränkten sich jedoch vorerst auf vertikale seismische Anregungen. Dem von ihm vorgeschlagenen Verfahren liegt zur Erfassung der Behälter-Untergrund-Interaktion die Substrukturmethode zugrunde. Dabei muß vorab das System von Behälter und Flüssigkeit analysiert

werden. Das System von Fundament und Untergrund wird durch frequenzabhängige Feder-Dämpfer-Elemente beschrieben.

Von Veletsos und Tang wurde die Behälter-Untergrund-Interaktion auch bei horizontaler Anregung untersucht [74, 75]. Bei Verwendung von Frequenz- und Dämpfungsgrößen für ein äquivalentes Ersatzsystem konnte daraus ein Ingenieurverfahren abgeleitet werden, das die Anwendung der Antwortspektrenmethode erlaubt.

In Parameterstudien untersuchten Haroun und Abou-Izzeddine [30, 31] ebenfalls den Einfluß des Untergrundes für vertikale und horizontale Anregungen.

Seeber gibt in seiner Arbeit [60] ein Verfahren an, das ebenfalls auf der Substrukturmethode basiert. Als Ingenieurverfahren kann es nur bedingt verwendet werden, da eine modale Zerlegung der Bewegungsgleichungen und damit die Anwendung der Antwortspektrenmethode nicht ohne weiteres möglich ist.

Latz [38] stellt in seiner Arbeit Ergebnisse aus numerischen Berechnungen denen aus Ingenieurverfahren gegenüber. Zur Erfassung der Flüssigkeit und des Untergrundes verwendet er die Randelementemethode.

Unverankerte Behälter

Flüssigkeitsbehälter werden oftmals ohne eine Verankerung mit dem Fundament errichtet. Die bei horizontaler Anregung erzeugten Umsturmkräfte können dann ein Abheben des Behälters vom Untergrund bewirken. Ein Abheben ist auch möglich, wenn große Verformungen der Verankerung auftreten bzw. eine vorhandene Verankerung versagt.

Das Abheben des Behälters stellt ein nichtlineares dynamisches Problem dar. Vereinfachend werden sogenannte quasistatische Verfahren angewendet. Von Scharf [54] wurde auf der Grundlage von quasistatischen numerischen Untersuchungen ein Ingenieurverfahren entwickelt. Dieses Verfahren ist auch Bestandteil des Eurocode 8, Part 4 [14]. Malhotra hat in [43] ein Ingenieurverfahren unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeit des Untergrundes angegeben.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind ausschließlich verankerte Behälter.

Die vorhandenen Ingenieurverfahren zur Berechnung der Behälter-Flüssigkeit-Untergrund Interaktion unterscheiden sich insbesondere hinsichtlich der Erfassung der in Abb. 1.1 dargestellten Einflüsse auf die Interaktionsvorgänge. In der Tab. 1.1 sind die Einflüsse aufgeführt, die mit den Modellen verschiedener Autoren berücksichtigt werden können.

Bei der Berechnung der Interaktion von Fundament und Untergrund wird bisher von einer starren Behältergründung ausgegangen. Tatsächlich liegen oftmals sehr flexible Gründungskonstruktionen vor [64]. Weiterhin gibt es noch keine Untersuchungen zum Einfluß der Flüssigkeitsviskosität auf die Interaktion von Behälter und Flüssigkeit. Tatsächlich treten aber neben Flüssigkeiten mit geringer Viskosität auch hochviskose Inhaltsstoffe wie z.B. bestimmte Rohöle auf. Ebenfalls ungeklärt ist der tatsächliche Einfluß der Flüssigkeitskompressibilität auf die gemeinsame Schwingung von flexibler Behälterwand und Flüssigkeit.

Zur Bewertung der Leistungsfähigkeit der Ingenieurverfahren existieren bisher nur wenige Arbeiten. Von Latz wurde in [38] eine Bewertung eines Ingenieurverfahrens anhand von numerischen Untersuchungen vorgenommen. Allerdings wurde nur ein sehr einfaches Ingenieurverfahren ausgewählt und die Vergleiche waren auf einen geringen Umfang von Behälterparametern beschränkt.

Einflußfaktor	Autor			
	Veletsos u.a. [72, 74, 75]	Haroun u.a. [30, 31]	Seeber [60]	vorliegende Arbeit
Teilsystem Behälter-Flüssigkeit				
Steifigkeit der Behälterwand	●	●	●	●
veränderliche Wandstärke	○	○	○	○
Dachausbildung	○	○	○	○
Lagerung der Wand	Einspannung	Einspannung	Membranlagerung, Gelenk, Einspannung	Einspannung
Oberflächenschwingung der Flüssigkeit	●	●	●	●
Kopplung von Oberflächen- und Interaktions-schwingung	○	○	○	○
Versteifung der Schale durch die Flüssigkeit	○	○	○	○
Kompressibilität der Flüssigkeit	○	○	○	●
Viskosität der Flüssigkeit	○	○	○	●
Teilsystem Fundament-Untergrund				
Steifigkeit der Gründung	○	○	○	●
Steifigkeit und Wellenabstrahlung des Untergrundes	●	◐	●	●
○ nicht berücksichtigt ◐ teilweise berücksichtigt ● berücksichtigt				

Tab. 1.1: Erfassung der Einflüsse auf die Interaktion von verankertem Behälter, Flüssigkeit und Untergrund mit Ingenieurverfahren

1.3 Zielstellung und Gliederung der Arbeit

Ziele der Arbeit

Es ist ein wesentliches Anliegen dieser Arbeit, einerseits die Leistungsfähigkeit der Berechnungsverfahren bzw. der zugrunde gelegten Bemessungskonzepte unter Beachtung der maßgebenden Einflußparameter zu kennzeichnen und bestehende Defizite aufzuzeigen. Andererseits soll ein Beitrag zur Weiterentwicklung des von Veletsos und Tang [72, 74, 75] vorgeschlagenen Ingenieurverfahrens geleistet werden, das unter den zur Verfügung stehenden Ingenieurverfahren den höchsten Entwicklungsstand besitzt und dessen Anwendung im Eurocode 8, Teil 4 (in einem

Anlagenteil) empfohlen wird. Dafür sollen die folgenden Einflüsse auf die Interaktionsvorgänge untersucht werden (Tab. 1.1):

1. Einfluß der Flüssigkeitskompressibilität und -viskosität auf die Interaktion von Behälter und Flüssigkeit
2. Einfluß der Gründungssteifigkeit auf die Interaktion von Behälterfundament und Untergrund.

Weiterhin werden folgende Ziele verfolgt:

3. Berücksichtigung der maßgebenden Einflüsse in dem mechanischen Modell zur Interaktion von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund (Tab. 1.2)
4. Kennzeichnung der Leistungsfähigkeit und Anwendungsgrenzen des erweiterten mechanischen Modells gegenüber Ergebnissen aus Finite-Elemente-Berechnungen
5. Ableitung von dynamischen Kenngrößen für das dem Ingenieurverfahren zugrundeliegende äquivalente Ersatzsystem mit dem Ziel ihrer Verwendung in einem normengerechten Berechnungskonzept (Tab. 1.3).

Eingrenzung des Arbeitsgebietes

In der Arbeit werden ausschließlich oberirdische Flüssigkeitsbehälter untersucht. Die Behälterwand wird durch einen geschlossenen Kreiszylinder mit vertikaler Längsachse gebildet, der über ein Kreisplattenfundament auf der Untergrundoberfläche gegründet ist. Es werden ausschließlich verankerte Behälter betrachtet. Ein Abheben des Behälters vom Fundament ist nicht möglich. Das Fundament liegt flach auf der Untergrundoberfläche auf. Ein Abheben des Fundaments vom Untergrund wird ebenfalls ausgeschlossen.

Weiterhin werden die folgenden Annahmen getroffen:

- Für alle Komponenten (Behälter, Flüssigkeit, Untergrund) werden die auftretenden Verformungen als klein vorausgesetzt, so daß linearisierte Bewegungsgleichungen verwendet werden können. Es wird linear-elastisches, isotropes und homogenes Materialverhalten angenommen.
- Die Behälterwand ist dünn gegenüber den anderen Hauptabmessungen des Behälters. Sie kann als dünnwandige Kreiszylinderschale angesehen werden.
- Das Kreisfundament wird als schubsteife Platte betrachtet.
- Der Untergrund wird als ungeschichteter Halbraum angenommen.
- Es wird ausschließlich die Trägheitsinteraktion von Behälter und Untergrund untersucht. Eine kinematische Interaktion wird nicht behandelt.

Gliederung der Arbeit

Die bekannten Ingenieurverfahren zur Erfassung der Behälter-Untergrund-Interaktion verwenden die Substrukturmethode. Der Berechnungsablauf erfolgt dabei in drei Schritten (Tab. 1.2).

Im **ersten Schritt** wird das Gesamtsystem mit den Komponenten Behälter, Flüssigkeit, Fundament und Untergrund in die Teilsysteme Behälter-Flüssigkeit (Teilsystem 1) und Fundament-Untergrund (Teilsystem 2) zerlegt.

Im **zweiten Schritt** werden die Teilsysteme getrennt voneinander analysiert. Es wird eine modale Analyse des Behälter-Flüssigkeit-Systems durchgeführt und das frequenzabhängige Verhalten des Fundament-Untergrund-Systems untersucht. Mit der modalen Analyse kann das kontinuierliche System von Behälter und Flüssigkeit durch eine Reihe von unabhängigen Einfreiheitsgradschwingern ersetzt werden. Aus der Untersuchung des frequenzabhängigen Verhaltens des Teilsystems Fundament-Untergrund werden Feder-Dämpfer-Elemente abgeleitet, deren Eigenschaften sich durch Impedanzfunktionen beschreiben lassen. Die Impedanzfunktion gibt das Verhältnis von der auf das Fundament wirkenden Last und den zugehörigen Fundamentverschiebungen bzw. -verdrehungen an.

Im **dritten Schritt** wird aus den Teilsystemen durch Kopplungsbedingungen das Gesamtsystem gebildet. Als Kopplungsbedingungen werden die Gleichgewichtsbedingungen an der Schnittstelle Fundament-Behälter verwendet. Aus den frequenzabhängigen Bewegungsgleichungen werden die Übertragungsfunktionen des Gesamtsystems, das heißt die frequenzabhängigen Amplituden und Phasenänderung gegenüber der seismischen Bodenbewegung, bestimmt. Mit diesen können die Antwortgrößen des Behälters für konkrete Erdbebeneinwirkungen ermittelt werden.

In *Kapitel 2* wird die **Interaktion von Behälter und Flüssigkeit** untersucht. Es wird ein Verfahren entwickelt, mit dem eine modale Analyse der Interaktionsschwingung von Schale und Flüssigkeit durchgeführt werden kann. In einer Parameteruntersuchung werden die eigenen Ergebnisse mit denen aus verschiedenen Ingenieurverfahren und denen aus numerischen Berechnungen verglichen. Die Einflüsse der Schalenmasse, der Kopplung von axialer und Umfangs- bzw. Radialbewegung der Schale sowie der Flüssigkeitskompressibilität auf die Interaktion von Schale und Flüssigkeit werden betrachtet. Um die Viskosität der Flüssigkeit berücksichtigen zu können, wird ein anwendungsbereites Verfahren entwickelt.

Das *Kapitel 3* behandelt die **Interaktion von Fundament und Untergrund**. Um die Flexibilität der Gründung in dem Berechnungsablauf nach Tab. 1.2 berücksichtigen zu können, ist es erforderlich, entsprechende Feder-Dämpfer-Elemente für das Fundament-Untergrund-System zur Verfügung zu haben.

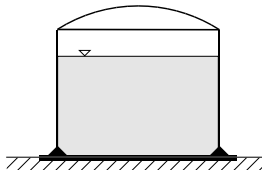
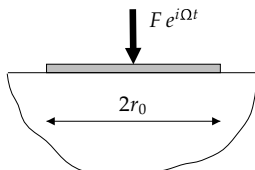

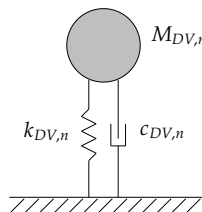

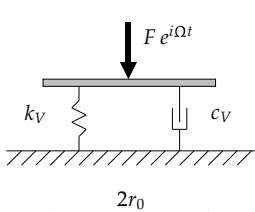
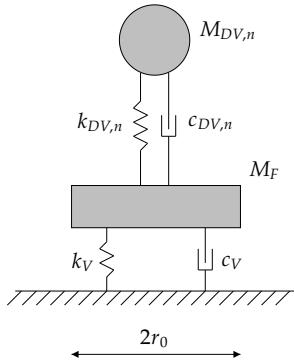
Für starre Fundamente sind in der Literatur Impedanzfunktionen für verschiedenste Randbedingungen vorhanden. So können z.B. unterschiedliche Fundamentgeometrien, eine Einbettung des Fundaments und die Schichtung des Baugrunds berücksichtigt werden ([62]). Impedanzfunktionen, welche die Fundamentflexibilität berücksichtigen, wurden bisher vorwiegend für Geschossbauten bestimmt. Die Trägheitskräfte werden dabei durch die Wände der Geschossbauten als Linienlasten in das Fundament eingeleitet. Bei Behältertragwerken werden die Trägheitskräfte sowohl durch Flächenlasten (Flüssigkeitsdruck) als auch durch Ringlasten aus der Behälterwand auf die Fundamentplatte aufgebracht. Es ist somit erforderlich, Impedanzfunktionen zu bestimmen, welche die Besonderheiten der Lastverteilung auf die Fundamente von Flüssigkeitsbehältern berücksichtigen.

Eine Möglichkeit zur Bestimmung von Impedanzfunktionen für Kreisfundamente auf der Untergrundoberfläche bietet die Ringmethode nach Lysmer [41]. Sie wird in *Kapitel 3* auf flexible Fundamente und die antimetrische Belastung erweitert. Es werden Impedanzfunktionen für die harmonische Anregung des Kreisplattenfundaments durch eine Kombination von einer antimetrischen Ringlast und einer antimetrischen Flächenlast ermittelt.

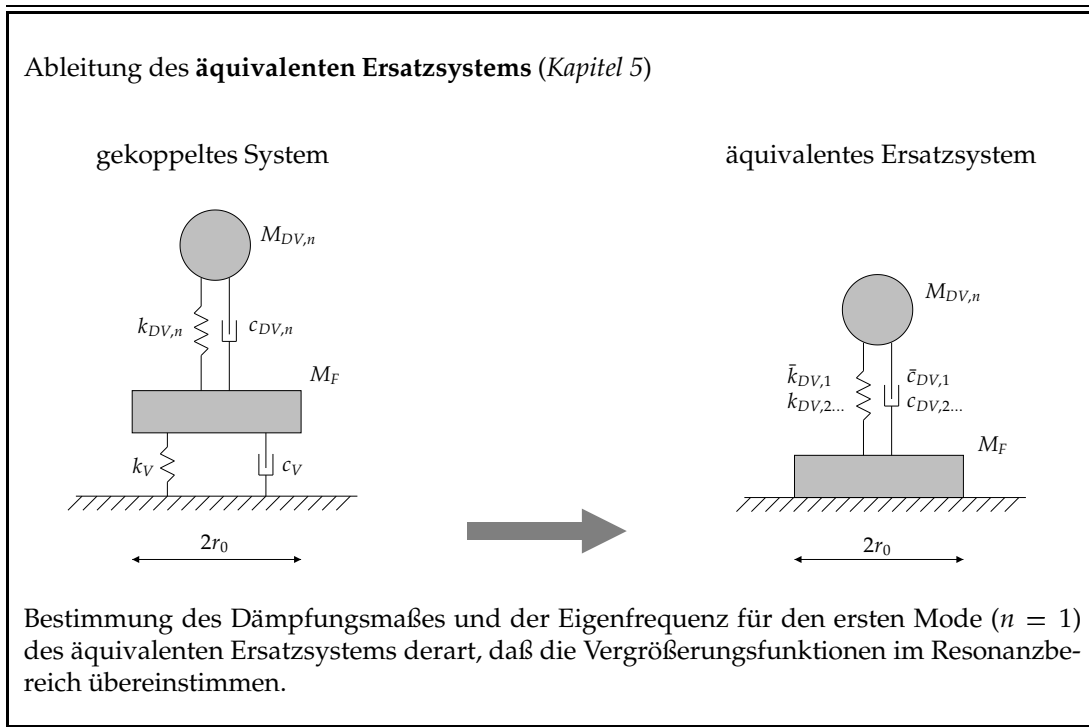
Nach der Analyse der Teilsysteme wird in *Kapitel 4* das **Gesamtsystem von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund** untersucht. Es werden die Bewegungsgleichungen für das gekoppelte System im Frequenzbereich angegeben. Die dynamischen Kenngrößen Resonanzfrequenz und Dämpfung werden für typische Behälterparameter bestimmt und mit den Kenngrößen aus Finite-Elemente-Berechnungen verglichen.

Aufgrund der unterschiedlichen Dämpfungen der einzelnen Teilsysteme ist es schwierig, eine modale Zerlegung der Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems durchzuführen. In *Kapitel 5* wird eine näherungsweise Entkopplung des Gesamtsystems mit Hilfe des von Veletsos und Tang [72, 74] entwickelten **äquivalenten Ersatzsystems** vorgenommen, um die Antwortspektrenme-

thode anwenden zu können. Die dynamischen Kenngrößen für das dem Ingenieurverfahren zugrundeliegende erweiterte äquivalente Ersatzsystem werden aus den Übertragungsfunktionen des gekoppelten Gesamtsystems bestimmt (Tab. 1.3).

Berechnungsschritt		Anwendung auf Flüssigkeitsbehälter	
1.	Bildung von Teilsystemen	Teilsystem 1: Behälter-Flüssigkeit	Teilsystem 2: Fundament-Untergrund
2.	Analyse der Teilsysteme	Analyse der Interaktion von Behälter und Flüssigkeit (Kapitel 2)	Analyse der Interaktion von Fundament und Untergrund (Kapitel 3)
	Ausgangssystem	Schale-Flüssigkeit-Kontinuum 	Fundament-Untergrund-Kontinuum 
	Berechnungsmethode	modale Analyse  	frequenzabhängiges Verhalten  
	Ergebnis	entkoppelte Einfreiheitsgradschwinger	frequenzabhängige Feder-Dämpfer-Elemente (Impedanzfunktionen)
3.	Kopplung der Teilsysteme	Gesamtsystem von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund (Kapitel 4)	
	Berechnungsmethode	frequenzabhängiges Verhalten 	
	Ergebnis	Übertragungsfunktion des gekoppelten Systems	

Tab. 1.2: Berechnungsablauf bei der Substrukturmethode.



Tab. 1.3: Ableitung des äquivalenten Ersatzsystems zur Verwendung im Ingenieurverfahren.

2 Interaktion von Behälter und Flüssigkeit

Entsprechend dem Berechnungsablauf der Substrukturmethode nach Tab. 1.2 wird im folgenden Kapitel zunächst das Teilsystem Behälter-Flüssigkeit untersucht.

In *Abschnitt 2.2* wird zunächst die Interaktion von Behälter und inkompressibler reibungsfreier Flüssigkeit analysiert. Es werden die Bewegungsgleichungen für den Behälter und die Flüssigkeit aufgestellt. Für die Gleichung der Flüssigkeit werden Lösungen in Abhängigkeit von den Randbedingungen angegeben.

Unter Verwendung der Integralgleichungsformulierung des dynamischen Eigenwertproblems wird ein Verfahren entwickelt, das die modale Analyse des Behälter-Flüssigkeit-Kontinuums ermöglicht.

Auf Grundlage dieses Verfahrens werden in *Abschnitt 2.3* die Ergebnisse einer Parameterstudie dargestellt.

Bisher sind noch keine systematischen Untersuchungen zum Einfluß der Flüssigkeitskompressibilität auf die Interaktionsschwingung von Schale und Flüssigkeit vorhanden. In *Abschnitt 2.4* wird unter Verwendung der "exakten" Eigenfrequenzen des Behälter-Flüssigkeit-Systems der Einfluß der Flüssigkeitskompressibilität auf die Antwortgrößen untersucht.

In *Abschnitt 2.5* wird ein Verfahren entwickelt, mit dem der Einfluß der Flüssigkeitsviskosität auf die Interaktion von Schale und Flüssigkeit berücksichtigt werden kann.

In *Abschnitt 2.6* wird dargestellt, wie unter Anwendung der modalen Analyse das Behälter-Flüssigkeit-Kontinuum durch ein System von entkoppelten Einfreiheitsgradschwingern ersetzt werden kann und damit die Anwendung der Antwortspektrenmethode für eine ingenieurmäßige Berechnung möglich ist.

2.1 Koordinatensystem und Bezeichnungen

Die Verschiebungen des Behälters setzen sich aus Starrkörper- und Relativverschiebungen zusammen. Aufgrund der Rotationssymmetrie des Tragwerks wird für die Relativbewegungen ein mit dem Behälter verbundenes Zylinderkoordinatensystem zugrunde gelegt. Der Koordinatenursprung befindet sich im Mittelpunkt des Behälterbodens. Zur Beschreibung der Starrkörperverschiebungen und der seismischen Anregung dient ein festes kartesisches Koordinatensystem (Abb. 2.1). Für die Flüssigkeit wird ebenfalls ein Zylinderkoordinatensystem verwendet.

Es werden folgende dimensionslose Koordinaten eingeführt:

$$\zeta = \frac{r}{R} \quad \xi = \frac{z}{H} \quad (2.1)$$

Zur Beschreibung der Behältergeometrie werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\text{Behälterschlankeit: } \alpha = \frac{H}{R} \quad \text{bezogener Radius: } \eta = \frac{R}{d} \quad (2.2)$$

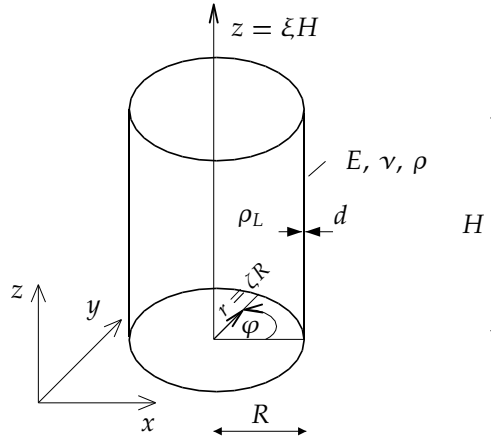


Abb. 2.1: Koordinatensystem und Bezeichnungen

2.2 Interaktion von Behälter und inkompressibler reibungsfreier Flüssigkeit

2.2.1 Potentialgleichung der Flüssigkeit

Die Flüssigkeit wird zunächst durch das Modell der inkompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit beschrieben. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Auswirkungen der Kompressibilität und der Viskosität vernachlässigt werden können. Weiterhin wird die Bewegung der Flüssigkeit als wirbelfrei angenommen. Unter diesen Voraussetzungen kann für die Flüssigkeitgeschwindigkeit $\mathbf{v} = (v_z, v_\varphi, v_r)^T$ ein skalares Geschwindigkeitspotential $\Phi(\zeta, \varphi, \xi, t)$ eingeführt werden:

$$\nabla \Phi = \mathbf{v} \quad (2.3)$$

Die Inkompressibilitätsbedingung der Flüssigkeit ergibt sich damit in Form der homogenen Potentialgleichung (Laplacegleichung, siehe z.B. Sommerfeld [65]):

$$\Delta \Phi = 0 \quad (2.4)$$

Zusätzlich zu Glg. 2.4 sind die kinematischen Randbedingungen der Flüssigkeit zu erfüllen. Sie ergeben sich aus der Forderung, daß die Flüssigkeit mit den angrenzenden Rändern kompatibel verbunden sein muß. Dies ist erfüllt, wenn die zugehörigen Geschwindigkeiten übereinstimmen.

Unter der Voraussetzung von kleinen Amplituden der Geschwindigkeiten können die Randbedingungen wie folgt formuliert werden (s.a. Landau und Lifschitz [37]):

$$\frac{1}{H} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial u_L}{\partial t} \quad \text{für: } \xi = 1 \quad (2.5a)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = -\frac{\partial W}{\partial t} \quad \text{für: } \zeta = 1 \quad (2.5b)$$

$$\frac{1}{H} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\frac{\partial u_B}{\partial t} \quad \text{für: } \xi = 0 \quad (2.5c)$$

Darin bezeichnen u_L die axiale Verschiebung der Flüssigkeit an der Oberfläche bei $\xi = 1$, W die radiale Verschiebung der Behälterwand und u_B die axiale Verschiebung des Behälterbodens. Unter Verwendung der linearisierten Benoullischen Gleichung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho_L} + g u_L = 0 \quad \text{für: } \xi = 1 \quad (2.6)$$

ergibt sich aus Glg. 2.5a die Randbedingung an der freien Flüssigkeitsoberfläche (Schwappbedingung):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{g}{H} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{für: } \xi = 1 \quad (2.7)$$

In Glg. 2.6 ist p_0 der atmosphärische Druck an der freien Flüssigkeitsoberfläche. Mit g wird die Erdbeschleunigung bezeichnet.

Durch die Potentialgleichung (Glg. 2.4) und die Randbedingungen (Glg. 2.5b, 2.5c und 2.7) wird das räumliche Verhalten von Φ festgelegt. Die Randbedingungen bestimmen zusätzlich auch das zeitliche Verhalten des Geschwindigkeitspotentials.

Die dynamischen Druckverteilungen werden mit der folgenden Glg. 2.8 bestimmt:

$$p = -\rho_L \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.8)$$

2.2.2 Lösung für die Potentialgleichung

Unter seismischen Einwirkungen treten in Flüssigkeitsbehältern außer dem statischen Flüssigkeitsdruck zusätzliche dynamische Druckverteilungen auf. Diese dynamischen Druckverteilungen können in eine konvektive und impulsive Komponente aufgeteilt werden. Die konvektive Komponente kennzeichnet die Schwappschwingung an der Flüssigkeitsoberfläche. Der impulsive Druck resultiert aus der Starrkörperbewegung des Behälters einerseits und der Relativbewegung der flexiblen Behälterwand andererseits. Während für den impulsiven Druckanteil infolge der Starrkörperbewegung geschlossene Lösungen angegeben werden können, ist dies für die Relativbewegung von Flüssigkeit und Behälterwand nicht möglich.

Die Eigenfrequenzen der Schwappschwingung und der Behälterschwingung infolge der impulsiven Komponente liegen ca. um den Faktor 10 auseinander. Es kann deshalb davon ausgegangen werden, daß die Schwappschwingung und die impulsive Komponente aus der Relativbewegung der flexiblen Behälterwand voneinander entkoppelt sind. Daß die impulsiven und konvektiven Druckanteile als entkoppelt betrachtet werden können, wurde ebenfalls von Fischer in [15] nachgewiesen. Damit kann bei der Schwappschwingung von einer starren Behälterwand ausgegangen werden.

Aufteilung des Gesamtproblems

Die Laplacegleichung (Glg. 2.4) lautet in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.9)$$

Unter Verwendung eines Produktansatzes für das Geschwindigkeitspotential:

$$\Phi(\zeta, \varphi, \xi, t) = P(\zeta)Q(\varphi)S(\xi)F(t) \quad (2.10)$$

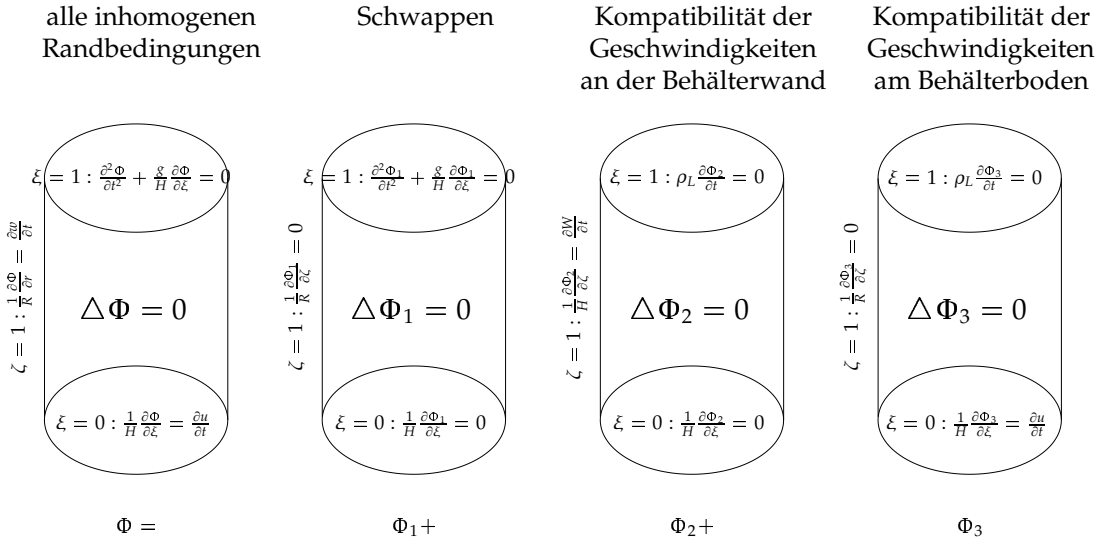


Abb. 2.2: Aufteilung des Gesamtproblems entsprechend der inhomogenen Randbedingungen.

und eines Fourier-Reihen-Ansatzes für die Funktion in Umfangsrichtung:

$$Q(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m \cos(m\varphi) \quad (2.11)$$

läßt sich die Glg. 2.9 in zwei gewöhnliche entkoppelte Differentialgleichungen umformen:

$$\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\xi^2} = \lambda^2 \quad (2.12)$$

$$\zeta^2 \frac{d^2 P}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dP}{d\zeta} + (\lambda^2 \zeta^2 - m^2) P = 0 \quad (2.13)$$

Für den Ansatz in Umfangsrichtung $Q(\varphi)$ wird dabei vorausgesetzt, daß das Geschwindigkeitspotential bezüglich φ symmetrisch ist. Bei einer unsymmetrischen Verteilung sind zusätzlich Fourier-Glieder mit $\sin(m\varphi)$, $m \geq 1$ zu berücksichtigen.

Eine Lösung der Glg. 2.12 und 2.13 läßt sich angeben, wenn das Geschwindigkeitspotential aus drei Anteilen zusammengesetzt wird: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$. Jedes dieser Potentiale muß die Glg. 2.9 und jeweils eine der inhomogenen Randbedingungen (Glg. 2.5b, 2.5c und 2.7) sowie zwei homogene Randbedingungen erfüllen. In der Abb. 2.2 sind die Randbedingungen für das Gesamt- und die Teilpotentiale dargestellt.

Inhomoge Randbedingung an der Flüssigkeitsoberfläche (Schwappen)

Lösungen der Besselschen Differentialgleichung (Glg. 2.13) unter Berücksichtigung der homogenen Randbedingung bei $\zeta = 1$ sind die Funktionen:

$$P_{m,n}(\zeta) = c_{1,m,n} J_m(\varepsilon_{m,n} \zeta) + c_{2,m,n} Y_m(\varepsilon_{m,n} \zeta) \quad (2.14)$$

Die Größen $c_{1,m,n}$ und $c_{2,m,n}$ sind darin konstante Faktoren. Da für $\zeta = 0$ die Werte endlich bleiben müssen, muß $c_{2,m,n} = 0$ sein. Die Größe $\varepsilon_{m,n}$ ist die n-te Nullstelle der Ableitung von $J_m(\zeta)$ nach ζ . Sie läßt sich aus der homogenen Randbedingung bei $\zeta = 1$ bestimmen:

$$\frac{d}{d\zeta} J_m(\varepsilon_{m,n}\zeta) = 0 \quad \text{für: } \zeta = 1 \quad (2.15)$$

Die Lösung der Glg. 2.12 unter Beachtung der homogenen Randbedingung bei $\xi = 0$ und mit $\varepsilon_{m,n} > 0$ sind die Funktionen :

$$S_{m,n}(\xi) = \cosh(\varepsilon_{m,n}\xi) \quad (2.16)$$

Der Lösungsansatz für Glg. 2.9 unter Berücksichtigung der homogenen Randbedingungen an der Behälterwand und am Behälterboden (Glg. 2.5b und 2.5c) lautet damit:

$$\Phi_1(\zeta, \varphi, \xi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{1,m,n}(t) \sinh(\varepsilon_{m,n}\alpha\xi) J_m(\varepsilon_{m,n}\zeta) \cos(m\varphi) \quad (2.17)$$

Die zeitabhängige Funktion $F_{1,m,n}(t)$ wird aus der inhomogenen Randbedingung an der Flüssigkeitsoberfläche bestimmt (Glg. 2.7). Die inhomogene Randbedingung wird dazu in eine Fourier-Reihe in bezug auf φ und ζ entwickelt.

Inhomoge Randbedingung an der Behälterwand

Die Lösung der Glg. 2.9 unter Berücksichtigung der homogenen Randbedingungen bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ sind die Funktionen:

$$S_n(\xi) = \cos(\mu_n\xi) \quad (2.18)$$

mit:

$$\mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad (2.19)$$

Da der Parameter λ in Glg. 2.12 in diesem Fall komplex ist, wird die Lösung von Glg. 2.9 durch die modifizierten Bessel-Funktionen gebildet:

$$P_{m,n}(\zeta) = c_{1,m,n} I_m(\mu_n\zeta) + c_{2,m,n} K_m(\mu_n\zeta) \quad (2.20)$$

Aufgrund der Singularität der modifizierten Bessel-Funktion zweiter Art bei $\zeta = 0$ muß $c_{2,m,n} = 0$ sein. Damit ergibt sich der folgende Lösungsansatz für das Flüssigkeitspotential:

$$\Phi_2(\zeta, \varphi, \xi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{2,m,n}(t) \cos(\mu_n\xi) I_m\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\zeta\right) \cos(m\varphi) \quad (2.21)$$

Die Bestimmung der zeitabhängigen Funktion $F_{2,m,n}(t)$ erfolgt analog zur Bestimmung von $F_{1,m,n}(t)$ im vorangegangenen Absatz. Die inhomogene Randbedingung wird dafür in eine Fourier-Reihe in bezug auf φ und ξ entwickelt.

Inhomoge Randbedingung am Behälterboden

Entsprechend zum Lösungsansatz für die inhomogene Randbedingung an der Flüssigkeitsoberfläche läßt sich der Lösungsansatz für die inhomogene Randbedingung am Behälterboden (Glg. 2.5c) bestimmen. Er lautet:

$$\Phi_3(\zeta, \varphi, \xi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{3,m,n}(t) \cosh(\varepsilon_{m,n}\alpha\xi) J_m(\varepsilon_{m,n}\zeta) \cos(m\varphi) \quad (2.22)$$

Die Ermittlung der zeitabhängigen Funktion $F_{3,m,n}(t)$ wird analog zur Bestimmung von $F_{1,m,n}(t)$ (Schwappschwingung) durchgeführt.

Lösungen für spezielle inhomogene Randbedingungen

Mit den gefundenen Ansätzen können für das Flüssigkeitspotential Φ vollständige Lösungen angegeben werden, wenn die inhomogenen Randbedingungen bekannt sind. Für spezielle inhomogene Randbedingungen sind in *Anhang A* Lösungen aufgeführt.

Bei der Interaktion von flexibler Behälterwand und Flüssigkeit sind die inhomogenen Randbedingungen nicht im voraus bekannt und müssen deshalb durch Näherungsverfahren bestimmt werden.

2.2.3 Differentialgleichung der Zylinderschale

Für das Behältertragwerk wird vorausgesetzt, daß es als dünnwandige, perfekte und geschlossene Kreiszyklinderschale betrachtet werden kann. Die Wandstärke wird als konstant angenommen. Die Geometrie der Schale ist damit durch den Radius R , die Höhe H und die Wandstärke d festgelegt (vgl. Abb. 2.1). Für das Material der Schale wird linear-elastisches, homogenes und isotropes Verhalten vorausgesetzt. Die Materialeigenschaften werden demnach durch den Elastizitätsmodul E , die Querdehnzahl ν und die Dichte ρ beschrieben. Der Behälter ist vollständig mit Flüssigkeit gefüllt.

Für die dünnwandige Schale ist die Schalenstärke klein gegenüber dem Schalenradius ($d \ll R$). In diesem Fall können mit ausreichender Genauigkeit die vereinfachten Schalengleichungen nach Flügge [19] verwendet werden. Unter Vernachlässigung von Dämpfungstermen sowie horizontaler und vertikaler Anregung lautet das Differentialgleichungssystem (s.a. [32]):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{S}\mathbf{U} = -\mathbf{F}\mathbf{a} \quad (2.23)$$

mit:

$$\mathbf{S} = \frac{D}{R^2} \begin{bmatrix} \left(\cdot \right)'' + \frac{1-\nu}{2} \left(\cdot \right)'' & \frac{1+\nu}{2} \left(\cdot \right)'' & \nu \left(\cdot \right)' \\ \frac{1+\nu}{2} \left(\cdot \right)'' & \left(\cdot \right)'' + \frac{1-\nu}{2} \left(\cdot \right)'' & \left(\cdot \right)' \\ \nu \left(\cdot \right)' & \left(\cdot \right)' & 1 + k \left[\left(\cdot \right)'''' + 2 \left(\cdot \right)'''' + \left(\cdot \right)'''' \right] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho d & 0 & 0 \\ 0 & \rho d & 0 \\ 0 & 0 & \rho d \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \rho d \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_z \\ a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

Mit \mathbf{U} werden die Relativverschiebungen der Schalenmittelfläche bezeichnet. Die gleichmäßig über den Behälterboden angreifenden Beschleunigungen sind durch \mathbf{a} gegeben. Die Matrix \mathbf{S} ist die Steifigkeitsmatrix der geschlossenen Zylinderschale nach Flügge [19]. Die Flüssigkeit wird in *Abschnitt 2.2.5* berücksichtigt. Die Einwirkung besteht vorerst ausschließlich aus den Trägheitskräften der Schale.

Für die Ableitungen nach φ und ξ in Glg. 2.23 werden die Bezeichnungen und Vereinbarungen von Flügge [19] verwendet:

$$(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\cdot)' = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

Für die Schale sind Randbedingungen einzuhalten. Die Randbedingungen sind abhängig von der Lagerung der Zylinderschale. Unter Verwendung der von Kichhoff eingeführten Stützkkräfte lauten die Randbedingungen (s.a. [19]):

$$\text{fester Rand:} \quad W = 0 \quad W' = 0 \quad V = 0 \quad U = 0 \quad (2.24a)$$

$$\text{gelenkiger Rand:} \quad W = 0 \quad m_z = 0 \quad V = 0 \quad U = 0 \quad (2.24b)$$

$$\text{freier Rand:} \quad n_z = 0 \quad m_z = 0 \quad q_z^* = 0 \quad n_{z\varphi}^* = 0 \quad (2.24c)$$

mit den Ersatzstützkraften:

$$q_z^* = q_z + \frac{m_{z\varphi}'}{R} \quad n_{z\varphi}^* = n_{z\varphi} - \frac{m_{z\varphi}}{R}$$

Zu den Randbedingungen sind Anfangsbedingungen für die Verschiebung und die Geschwindigkeit vorzugeben. Sie leiten sich aus der Ruhelage der Schale ab.

2.2.4 Lösung für die Zylinderschale

Für die modale Analyse der Interaktion von Behälter und Flüssigkeit wird in den folgenden Abschnitten die Einflußfunktion der Zylinderschale für die statische Belastung benötigt.

Mit den Angaben von Flügge [19] bzw. Hampe [24] kann diese Einflußfunktion ermittelt werden. Die wesentlichsten Schritte zur Bestimmung der Einflußfunktionen sind nachfolgend dargestellt. In *Anhang B* sind weitere ausführliche Angaben zu finden.

Bei vertikaler und horizontaler seismischer Anregung treten nur axialsymmetrische und antisymmetrische Belastungen auf, da eine perfekte Zylinderschale vorausgesetzt wird (s.a. Fischer und Rammerstorfer [17]). Es werden die vereinfachten Schalengleichungen nach Flügge [19] für konstante Wandstärke verwendet (Glg. 2.23).

Die Gesamtschale wird am Angriffspunkt der Ringlast in zwei Teilschalen zerlegt. Die Ringlast wird vollständig dem unteren Schalenteil zugeordnet (s.a. *Anhang B*). Durch die Schnittführung werden Kraftgrößen (Schnittgrößen) freigesetzt. Die Ringlast und die Schnittgrößen greifen ausschließlich an den Rändern der Teilschalen an. Es sind deshalb die entsprechenden Randbedingungen nach Glg. 2.24a bis 2.24c zu beachten. Die Einflußfunktion der Verschiebungen wird demzufolge aus der homogenen Differentialgleichung bestimmt:

$$\mathbf{S}\mathbf{U} = 0 \quad (2.25)$$

bzw.:

$$\begin{bmatrix} \left((\cdot)'' + \frac{1-\nu}{2} (\cdot)'' \right)' & \frac{1+\nu}{2} (\cdot)'' & \nu (\cdot)' \\ \frac{1+\nu}{2} (\cdot)'' & (\cdot)'' + \frac{1-\nu}{2} (\cdot)'' & (\cdot)' \\ \nu (\cdot)' & (\cdot)' & 1 + k[(\cdot)'''' + 2(\cdot)'''' + (\cdot)'''] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Formänderungen und Schnittkräfte müssen entsprechend der Belastung in Umfangsrichtung periodische Funktionen sein. Für die Verschiebungen (symmetrisch bezüglich φ) wird ein Ansatz

als Fourier-Reihe getroffen:

$$\begin{aligned} U(\xi, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\xi) \cos(m\varphi) \\ V(\xi, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} v_m(\xi) \sin(m\varphi) \\ W(\xi, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} w_m(\xi) \cos(m\varphi) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Damit läßt sich die Differentiation nach φ ausführen. Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der Fourier-Reihe sind die einzelnen Glieder voneinander entkoppelt. Für jedes m kann ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen angegeben werden.

$$\begin{bmatrix} ()'' - m^2 \frac{1-\nu}{2} & m \frac{1+\nu}{2} ()' & \nu ()' \\ -m \frac{1+\nu}{2} ()' & \frac{1-\nu}{2} ()'' - m^2 & -m \\ \nu ()' & m & 1 + k[()'''' - 2m^2 ()'' + m^4] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Eine Lösung für dieses Gleichungssystem ist mit dem folgenden Exponentialansatz möglich:

$$u_m = A e^{\lambda \alpha \xi} \quad v_m = B e^{\lambda \alpha \xi} \quad w_m = C e^{\lambda \alpha \xi} \quad (2.28)$$

Mit diesem Ansatz läßt sich das System gewöhnlicher Differentialgleichungen in ein algebraisches Gleichungssystem überführen Glg. 2.29.

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - m^2 \frac{1-\nu}{2} & m \frac{1+\nu}{2} \lambda & \nu \lambda \\ -m \frac{1+\nu}{2} \lambda & \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 - m^2 & -m \\ \nu \lambda & m & 1 + k(\lambda^4 - 2m^2 \lambda^2 + m^4) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Daraus können die Beziehungen zwischen den Koeffizienten A , B und C abgeleitet und dem Parameter λ bestimmt werden. Die Koeffizienten A und B sind mit C über die folgenden Beziehungen verknüpft:

$$A = -H_A C \quad H_A = \frac{\lambda^3 \nu + \lambda m^2}{(\lambda^2 - m^2)^2} \quad (2.30)$$

$$B = +H_B C \quad H_B = \frac{\lambda^2(2m - \nu - \nu^2) - m^3(1 - \nu)}{(\lambda^2 - m^2)^2(1 - \nu)} \quad (2.31)$$

Da das Gleichungssystem homogen ist, muß die Determinante der 3×3 -Matrix von Glg. 2.29 für nichttriviale Lösungen von A , B und C verschwinden. Daraus ergibt sich die charakteristische Gleichung zur Bestimmung des Parameters λ :

$$\lambda^8 - \lambda^6 4m^2 + \lambda^4 \left(\frac{1 - \nu^2}{k} + 6m^4 \right) - \lambda^2 4m^6 + m^8 = 0 \quad (2.32)$$

Die Glg. 2.32 besitzt acht Wurzeln. Die Wurzeln sind paarweise konjugiert komplex:

Gleichung	ν	R/d	κ_1	μ_1	κ_2	μ_2
Näherung	0.3	1000	0.0123	0.0123	40.6605	40.6359
“exakt”	0.3	1000	0	0	40.6586	40.6377
Näherung	0.3	2000	0.0087	0.0087	57.4941	57.4767
“exakt”	0.3	2000	0	0	57.4928	57.4780
Näherung	0.2	100	0.0385	0.0383	13.0656	12.9889
“exakt”	0.2	100	0	0	13.0617	12.9927

Tab. 2.1: Wurzeln der charakteristischen Gleichung (Glg. 2.32) für $m=1$.

$$\lambda_{1,2} = -\kappa_1 \pm i\mu_1 \quad \lambda_{5,6} = \kappa_1 \pm i\mu_1 \quad (2.33)$$

$$\lambda_{3,4} = -\kappa_2 \pm i\mu_2 \quad \lambda_{7,8} = \kappa_2 \pm i\mu_2 \quad (2.34)$$

Bei $m = 0$ ergibt sich für die Wurzeln $\kappa_1 = \mu_1 = 0$ und $\kappa_2 = \mu_2 = \sqrt[4]{\frac{1-\nu^2}{k}} \frac{\sqrt{2}}{2}$. In Tab. 2.1 sind die entsprechenden Werte für $m = 1$ in Abhängigkeit von ν und R/d angegeben. Der Vergleich mit den Wurzeln der “exakten” Schalengleichung nach Flügge [19] zeigt, daß die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5$ und λ_6 den Membranzustand repräsentieren und auch in der Näherung null gesetzt werden können. Dem Biegezustand muß demnach ein Membranzustand überlagert werden: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_B + \mathbf{u}_M$.

Axialsymmetrische Ringlast

Durch die Bildung von Teilschalen werden an der Schnittstelle Randkraftgrößen freigesetzt. Jedem korrespondierenden Paar von Randkraftgrößen wird ein Randlastfall zugeordnet. Der Verformungszustand \mathbf{u} ist für alle an den Teilschalen auftretenden Randlastfälle zu ermitteln.

Der Lösungsansatz für den Biegezustand lautet:

$$\begin{pmatrix} u_B \\ w_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_A e^{\lambda_3 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_4 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_7 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_8 \alpha \xi} \\ e^{\lambda_3 \alpha \xi} & e^{\lambda_4 \alpha \xi} & e^{\lambda_7 \alpha \xi} & e^{\lambda_8 \alpha \xi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Die Lösungsansatz für die Membranverschiebungen lautet:

$$\begin{pmatrix} u_M \\ w_M \end{pmatrix} = \frac{R^2}{Ed} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{R} \xi & -1 \\ \frac{\nu}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

In den Ansätzen sind sechs unbekannte Koeffizienten vorhanden. Sie müssen aus den Randbedingungen der Teilschalen bestimmt werden. Die zu den auftretenden Randlastfällen gehörigen Randbedingungen für den axialsymmetrischen Verformungszustand sind in *Anhang B* angegeben. Die Lösungsansätze sind in die Randbedingungen einzusetzen. Aus dem resultierenden Gleichungssystem werden die unbekannten Koeffizienten ermittelt. Damit ist der Verformungszustand für jeden Randlastfall in Abhängigkeit von der Lastamplitude gegeben.

Die Amplituden werden jetzt so festgelegt, daß die Verformungen an der Übergangsstelle der Teilschalen übereinstimmen. Das zugehörige Gleichungssystem ist in *Anhang B* angegeben. Die Überlagerung der Verformungszustände für die Randlastfälle mit den entsprechenden Amplituden ergibt die Gesamtverformung unter der angreifenden Ringlast und damit die gesuchte Einflußfunktion. Durch die axialen Verformungen des unteren Schalenteils treten Starrkörperverschiebungen des oberen Schalenteils auf. Diese sind beim Zusammensetzen der Teilschalen zu berücksichtigen.

Antimetrische Ringlast

Die Schrittfolge zur Ermittlung der Einflußfunktion ist gleich der des axialsymmetrischen Verformungszustandes. Es sind wieder für jeden Randlastfall die zugehörigen Verformungen in Abhängigkeit von den Lastamplituden zu bestimmen.

Der Lösungsansatz für den Biegezustand lautet:

$$\begin{pmatrix} u_B \\ v_B \\ w_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_A e^{\lambda_3 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_4 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_7 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_8 \alpha \xi} \\ H_B e^{\lambda_3 \alpha \xi} & H_B e^{\lambda_4 \alpha \xi} & H_B e^{\lambda_7 \alpha \xi} & H_B e^{\lambda_8 \alpha \xi} \\ e^{\lambda_3 \alpha \xi} & e^{\lambda_4 \alpha \xi} & e^{\lambda_7 \alpha \xi} & e^{\lambda_8 \alpha \xi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Die Lösungsansatz für die Membranverschiebungen lautet:

$$\begin{pmatrix} u_M \\ v_M \\ w_M \end{pmatrix} = \frac{R^2}{Ed} \begin{bmatrix} -\frac{\alpha^2}{2R} \xi^2 & \frac{\alpha}{R} \xi & -1 & 0 \\ -\frac{\alpha^3}{6R} \xi^3 + \frac{2(1+\nu)\alpha}{R} \xi & \frac{\alpha^2}{2R} \xi^2 & -\alpha \xi & -1 \\ \frac{\alpha^3}{6R} \xi^3 - \frac{(2+\nu)\alpha}{R} \xi & -\frac{\alpha^2}{2R} \xi^2 - \frac{\nu}{R} & \alpha \xi & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Die auftretenden Randlastfälle mit den Randbedingungen sind in *Anhang B* angegeben. Ebenfalls im *Anhang B* ist das Gleichungssystem zu Ermittlung der Koeffizienten $C_{3,4,7,8}$ und $D_{1..4}$ dargestellt. Die axialen Verformungen der unteren Teilschale rufen im antimetrischen Verformungszustand eine Starrkörperverdrehungen des oberen Schalenteils hervor. Weiterhin treten horizontale Starrkörperverschiebungen des oberen Schalenteils infolge der radialen und der Umfangsverformungen auf. Diese sind bei der Bestimmung der Übergangsschnittgrößen zu beachten.

2.2.5 Gleichungen für Zylinderschale und Flüssigkeit

Die Flüssigkeit wird berücksichtigt, indem sie als zusätzliche Belastung der Schale aufgefaßt wird. Diese ergibt sich aus dem dynamischen Druck der Flüssigkeit. Er kann mit den Angaben des *Abschnitt 2.2.2* und des *Anhangs A* ermittelt werden. Dabei ist zwischen dem Druck aus der Starrkörperverschiebung der Flüssigkeitssäule und der Relativbewegung von Behälterwand und Flüssigkeit zu unterscheiden. Die Gleichungen zur Berechnung der Druckverteilungen an der Behälterwand aus den Starrkörperverschiebungen lauten:

$$\begin{aligned} \text{in z-Richtung: } p_{B,z}(\xi, t) &= \rho_L H (1 - \xi) a_z(t) \\ \text{in x-Richtung: } p_{B,x}(\xi, \varphi, t) &= R \alpha \rho_L \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \cos(\mu_n \xi) \cos \varphi a_x(t) \\ \text{in y-Richtung: } p_{B,y}(\xi, \varphi, t) &= R \alpha \rho_L \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \cos(\mu_n \xi) \sin \varphi a_y(t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Die Gleichung zur Berechnung der Druckverteilung an der Behälterwand in Abhängigkeit von der radialen Relativbewegung der Behälterwand $W(\xi, \varphi, t)$ lauten:

$$p_D(\xi, \varphi, t) = p_{D,0}(\xi, \varphi, t) + p_{D,1}(\xi, \varphi, t) + p_{D,2}(\xi, \varphi, t) \quad (2.40)$$

mit:

$$p_{D,0}(\xi, \varphi, t) = R\alpha\rho_L \sum_{n=1}^{\infty} F_{0,n}(t) \frac{I_m\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I'_m\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right) \mu_n} \cos(\mu_n \xi)$$

$$F_{0,n}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial^2 W(\xi, \varphi, t)}{\partial t^2} \cos(\mu_n \xi) d\xi d\varphi$$

$$p_{D,1}(\xi, \varphi, t) = R\alpha\rho_L \sum_{n=1}^{\infty} F_{1,n}(t) \frac{I_m\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I'_m\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right) \mu_n} \cos(\mu_n \xi) \cos(\varphi)$$

$$F_{1,n}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial^2 W(\xi, \varphi, t)}{\partial t^2} \cos(\mu_n \xi) \cos(\varphi) d\xi d\varphi$$

$$p_{D,2}(\xi, \varphi, t) = R\alpha\rho_L \sum_{n=1}^{\infty} F_{2,n}(t) \frac{I_m\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I'_m\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right) \mu_n} \cos(\mu_n \xi) \sin(\varphi)$$

$$F_{2,n}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial^2 W(\xi, \varphi, t)}{\partial t^2} \cos(\mu_n \xi) \sin(\varphi) d\xi d\varphi$$

In Ringrichtung φ müssen nur die 0. und die 1. Umfangsharmonische berücksichtigt werden. Höhere Umfangsharmonische treten bei einem perfekten Kreiszylinder nicht auf. Bei eindimensionaler horizontaler Anregung ist die radiale Verschiebung der Schale bezüglich φ symmetrisch und $F_{2,n}(t) = 0$ sowie $p_{B,y}(\xi, \varphi, t) = 0$.

Das resultierende Gleichungssystem hat in Matrixschreibweise die gleiche Form wie Glg. 2.23:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{S}\mathbf{U} = -\mathbf{F}\mathbf{a} \quad (2.41)$$

Es treten jedoch folgende veränderte Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{F} auf:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho d & 0 & 0 \\ 0 & \rho d & 0 \\ 0 & 0 & \rho d + \bar{p}_D \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho d & 0 & 0 \\ 0 & -\rho d \sin \varphi & \rho d \cos \varphi \\ \bar{p}_{B,z} & \rho d \cos \varphi + \bar{p}_{B,x} & \rho d \sin \varphi + \bar{p}_{B,y} \end{bmatrix}$$

Für die Druckverteilungen wurden dabei die folgenden normierten Größen verwendet:

$$\bar{p}_B(\xi, \varphi) = p_B(\xi, \varphi, t)/a(t) \quad \bar{p}_D(\xi, \varphi) = p_D(\xi, \varphi, t)/\dot{W}(\xi, \varphi, t)$$

Die Forderungen an die Anfangs- und Randbedingungen aus Abschnitt 2.2.3 bleiben bestehen.

2.2.6 Modale Analyse des Zylinderschale-Flüssigkeit-Systems

Vorhandene Berechnungsverfahren

Zur Lösung der Interaktion von Zylinderschale und Flüssigkeit werden vorwiegend numerische Näherungsverfahren eingesetzt. Die einfachste Möglichkeit, die Flüssigkeit zu berücksichtigen,

ist, sie als zusätzliche Masse auf die “trockene” Behälterschale aufzubringen (“added-mass“-Verfahren, Fischer und Rammerstorfer [17]). Die Gleichungen der Schale werden dann durch ein numerisches Berechnungsverfahren gelöst. Diese Vorgehensweise wird auch in der z.Zt. gültigen Fassung des Eurocode 8, Part 4, [14] vorgeschlagen. Wird auch die Flüssigkeit in das numerische Verfahren einbezogen, so steigt der Rechenaufwand deutlich an. Damit können aber auch Effekte wie z.B. die Versteifung des Behälters durch die Flüssigkeit oder das Gleiten der Flüssigkeit an der Behälterwand beschrieben werden (Latz [38]).

Als numerische Verfahren zur Berechnung von Flüssigkeitsbehältern wurden insbesondere das Galerkinsche Verfahren, die Methode der Finiten Elemente (FEM) und die Randelementemethode (REM) angewendet.

Das Galerkinsche Verfahren geht von den Differentialgleichungen des Randwertproblems aus (Tang [67], Seeber [60]).

Durch die FEM erfolgt eine direkte Lösung der zur Differentialgleichung äquivalenten Variationsaufgabe. Sie ist eine sehr flexible Methode, und es können sehr komplexe Geometrien berechnet werden. Weiterhin ist es auch möglich, nichtlineares Materialverhalten und geometrische Nichtlinearitäten zu erfassen [79].

Das dynamische Randwertproblem kann auch als Integralgleichung formuliert werden. Der REM liegt die näherungsweise Lösung der Integralgleichung zugrunde (z.B. Latz [38]). Für die Aufstellung der Integralgleichung ist die Kenntnis der Fundamentallösung der zugehörigen Differentialgleichungen notwendig.

Integralgleichungsformulierung des dynamischen Eigenwertproblems

Für die Zylinderschale ist es möglich, die Einflußfunktionen der Verschiebungen für die statische Belastung anzugeben (s.a. Abschnitt 2.2.4). Damit kann das dynamische Eigenwertproblem als Integralgleichung formuliert werden.

Für die Schalenverschiebungen der harmonischen Schwingung in der m-ten Umfangsharmonischen wird ein Produktansatz gewählt:

$$\mathbf{U}_m(\xi, \varphi, t) = \mathbf{u}_m(\xi) \cos(m\varphi) e^{i\omega t} \quad (2.42)$$

Die bei der Bewegung des Behälters auftretenden Trägheitskräfte der Behälterwand werden als äußere Belastung aufgefaßt. Der Flüssigkeitsdruck wird ebenfalls als zusätzliche Last auf die Zylinderschale aufgebracht. Wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, wird davon ausgegangen, daß die Oberflächenschwingung der Flüssigkeit nicht mit der Relativbewegung der Schale gekoppelt ist. Damit kann das Geschwindigkeitspotential der Flüssigkeit für die m-te Umfangsharmonische nach Abschnitt 2.2.2 in Abhängigkeit von der radialen Geschwindigkeit der Zylinderschale

$$\dot{W}_m(\xi, \varphi, t) = w_m(\xi) \cos(m\varphi) i\omega e^{i\omega t} \quad (2.43)$$

durch folgende Gleichung bestimmt werden:

$$\Phi_m(\xi, \zeta, \varphi, t) = 2R\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_m\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\zeta\right)}{I'_m\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)\mu_n} \int_0^1 w_m(\xi) \cos(\mu_n\xi) d\xi \cos(\mu_n\xi) \cos(m\varphi) i\omega e^{i\omega t} \quad (2.44)$$

Zur Bestimmung des Flüssigkeitsdrucks p_m aus dem Geschwindigkeitspotential ist die Glg. 2.45

zu verwenden:

$$p_m(\xi, \zeta, \varphi, t) = 2R\alpha\rho_L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n \xi)}{\mu_n} \frac{I_m\left(\frac{\mu_n}{\alpha} \zeta\right)}{I'_m\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \int_0^1 w_m(\xi) \cos(\mu_n \xi) d\xi \cos(m\varphi) \omega^2 e^{i\omega t} \quad (2.45)$$

Die Integralgleichungsformulierung des dynamischen Eigenwertproblems für die m-te Umfangsharmonische lautet damit:

$$\mathbf{u}_m(\xi) = \omega^2 H \int_0^1 \mathbf{G}_m(\xi, \bar{\xi}) \mathbf{M}_m \mathbf{u}_m(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (2.46)$$

mit den folgenden Matrizen für die 0. Umfangsharmonische:

$$\mathbf{G}_0(\xi, \bar{\xi}) = \begin{bmatrix} g_{uu,0}(\xi, \bar{\xi}) & g_{uw,0}(\xi, \bar{\xi}) \\ g_{wu,0}(\xi, \bar{\xi}) & g_{ww,0}(\xi, \bar{\xi}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} \rho d \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 \\ 0 & \rho d \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \bar{p}_0 \end{bmatrix}$$

und die 1. Umfangsharmonische:

$$\mathbf{G}_1(\xi, \bar{\xi}) = \begin{bmatrix} g_{uu,1}(\xi, \bar{\xi}) & g_{uv,1}(\xi, \bar{\xi}) & g_{uw,1}(\xi, \bar{\xi}) \\ g_{vu,1}(\xi, \bar{\xi}) & g_{vv,1}(\xi, \bar{\xi}) & g_{vw,1}(\xi, \bar{\xi}) \\ g_{wu,1}(\xi, \bar{\xi}) & g_{wv,1}(\xi, \bar{\xi}) & g_{ww,1}(\xi, \bar{\xi}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \rho d \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho d \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 \\ 0 & 0 & \rho d \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \bar{p}_1 \end{bmatrix}$$

sowie den Vektoren für die Verschiebungen:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

Werden nur der dynamische Flüssigkeitsdruck als Belastung angesetzt und die Trägheitskräfte der Schale vernachlässigt, so tritt keine Kopplung der Schalenbewegungen in radialer, axialer und Umfangsrichtung auf. Die Glg. 2.46 vereinfacht sich damit wesentlich:

$$w_m(\xi) = \omega^2 H \int_0^1 g_{ww,m}(\xi, \bar{\xi}) p_m(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (2.47)$$

Es ist zu beachten, daß der Druck p_m von den radialen Verschiebungen $w_m(\xi)$ abhängig ist.

Die Funktion $g_{wu,m}(\xi, \bar{\xi})$ ist die Einflußfunktion für die Verschiebung w der Kreiszylinderschale an der Stelle ξ unter einer Ringlast in Richtung von u an der Stelle $\bar{\xi}$ für die m-te Umfangsharmonische. Für die anderen Einflußfunktionen gilt entsprechendes.

Die Einflußfunktion wird auch als Greensche Funktion bzw. Kern der Integralgleichung bezeichnet. Eine wesentliche Eigenschaft der Einflußfunktion ist ihre Symmetrie:

$$\mathbf{G}(\xi, \bar{\xi}) = \mathbf{G}(\bar{\xi}, \xi)^T \quad (2.48)$$

Eigenwerte und Eigenfunktionen der Integralgleichung

Die Glg. 2.47 stellt eine homogene Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art dar. Sie kann auch in der folgenden Form angegeben werden:

$$\psi_{m,n}(\xi) = \lambda_{m,n} \int_0^1 g_{ww,m}(\xi, \bar{\xi}) \psi_{m,n}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (2.49)$$

Die Integralgleichung hat den symmetrischen Kern $g_{ww,m}(\xi, \bar{\xi})$. Für den n -ten Eigenwert des Kerns $\lambda_{m,n} = \omega_{m,n}^2$ besitzt die Integralgleichung eine von Null verschiedene Lösung $\psi_{m,n}$. Sie wird als n -te Eigenfunktion des Kerns $g_{ww,m}(\xi, \bar{\xi})$ bezeichnet.

Zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen wird das von Schmeidler in [56] S. 402 ff. angegebene Verfahren verwendet. Bei diesem Verfahren werden die Eigenwerte und -funktionen iterativ ermittelt. Dabei wird von einer Startfunktion $\psi_{m,n}^0(\bar{\xi})$ ausgegangen, die keine Nulllösung des Kerns der Integralgleichung ist. Für sie gilt damit die folgende Bedingung:

$$\int_0^1 g_{ww,m}(\xi, \bar{\xi}) \psi_{m,n}^0(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \neq 0 \quad (2.50)$$

Ausgehend von $\psi_{m,n}^0(\bar{\xi})$ wird die Folge von Funktionen $\psi_{m,n}^l(\xi)$, $l = 1, 2, \dots$ gebildet:

$$\psi_{m,n}^l(\xi) = \int_0^1 g_{ww,m}(\xi, \bar{\xi}) \psi_{m,n}^{l-1}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = \int_0^1 g_{ww,m}^l(\xi, \bar{\xi}) \psi_{m,n}^0(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (2.51)$$

mit dem iterierten Kern $g_{ww,m}^l(\xi, \bar{\xi})$:

$$g_{ww,m}^1(\xi, \bar{\xi}) = g_{ww,m}(\xi, \bar{\xi}) \quad g_{ww,m}^l(\xi, \bar{\xi}) = \int_0^1 g_{ww,m}^{l-1}(\xi, \bar{\xi}) g_{ww,m}(\bar{\xi}, \xi) d\bar{\xi} \quad l = 2, 3, \dots \quad (2.52)$$

Aus der Folge der Funktionen $\psi_{m,n}^l(\xi)$ werden die Werte a_{2l} ermittelt:

$$a_{2l} = \int_0^1 \left[\psi_{m,n}^l(\xi) \right]^2 d\xi \quad (2.53)$$

Die Folge der Quotienten a_{2l}/a_{2l+2} konvergiert gegen das Quadrat des ersten Eigenwerts:

$$(\lambda_{m,1})^2 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a_{2l}}{a_{2l+2}} \quad (2.54)$$

Der Quotient a_{2l}/a_{2l+2} liefert eine obere Abschätzung des Eigenwerts. Der Fehler δ kann mit folgender Glg. 2.55 abgeschätzt werden:

$$\delta \leq \frac{1}{2} \frac{\frac{a_{2l-2}}{a_{2l}} - \frac{a_{2l}}{a_{2l+2}}}{\frac{a_{2l+2}}{ka_{2l}} - 1} \quad (2.55)$$

mit:

$$k = \int_0^1 \int_0^1 g_{ww,m}(\xi, \bar{\xi}) d\xi d\bar{\xi} \quad (2.56)$$

Die Folge der Funktionen $\psi_{m,n}^l(\xi)$ strebt für $l \rightarrow \infty$ gegen die erste Eigenfunktion $\psi_{m,1}(\xi)$ des Kerns $g_{ww,m}(\xi, \bar{\xi})$. Die so ermittelte Eigenfunktion kann durch die folgende Gleichung normiert

werden:

$$\psi_{m,1}(\xi) = \frac{\psi_{m,1}^l(\xi)}{\sqrt{\int_0^1 [\psi_{m,1}^l(\xi)]^2 d\xi}} \quad (2.57)$$

Höhere Eigenwerte $\lambda_{m,N}$ und Eigenfunktionen $\psi_{m,N}$ mit $N > 1$ können ebenfalls bestimmt werden. Es müssen vorher aber alle niedrigeren Eigenfunktionen ermittelt worden sein. Für die Iteration ist dazu eine Funktionen $\psi_{m,N}^l(\xi)$ zu verwenden, die zu allen niedrigeren Eigenfunktionen $\psi_{m,n}(\xi)$, $n = 1..N-1$ orthogonal ist:

$$\int_0^1 \psi_{m,n}(\xi) \psi_{m,N}^l(\xi) d\xi = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \psi_{m,N}^l(\xi) \psi_{m,N}^l(\xi) d\xi \neq 0 \quad (2.58)$$

Die Orthogonalität kann erreicht werden, indem die Anteile der niedrigeren Eigenfunktionen durch die folgende Glg. 2.59 herausgelöst werden.

$$\psi_{m,N}^l(\xi) = \psi_{m,N}^l(\xi) - \sum_{n=1}^{N-1} \psi_{m,n}(\xi) \int_0^1 \psi_{m,n}(\xi) \psi_{m,N}^l(\xi) d\xi \quad l = 0, 1, .. \quad (2.59)$$

Diese Orthogonalisierung muß vor jedem Iterationsschritt erfolgen, da auch die vorab bestimmten niedrigeren Eigenfunktionen $\psi_{m,n}(\xi)$ nur Näherungen sind und auch die Orthogonalisierung mit Glg. 2.59 nicht exakt ist (s.a. Abschnitt 2.5.2).

Die Bestimmung des zugehörigen Eigenwertes $\lambda_{m,N}$ erfolgt mit Glg. 2.54

Anmerkungen zur praktischen Berechnung

Die erforderliche Anzahl von Iterationen, die notwendig ist, eine bestimmte Fehlergröße δ zu unterschreiten, ist von der Wahl der Startfunktion $\psi_{m,n}^0(\xi)$ und des zu bestimmenden Biegemodes abhängig. Für die 0. Umfangsharmonische wurde für den n-ten Biegemode $\psi_{0,n}^0(\xi) = \cos(n\frac{\pi}{2}\xi)$ als Startfunktion verwendet. Für die 1. Umfangsharmonische wurde für den n-ten Biegemode die Startfunktion $\psi_{1,n}^0(\xi) = \sin(n\frac{\pi}{2}\xi)$ gewählt.

Es waren je nach Biegemode zwischen 6 und 12 Iterationen erforderlich, um den Fehler δ auf 2% zu begrenzen. Die Berechnung erfolgte an 101 Stützstellen in konstanten Abständen über die Schalenhöhe. Für den Flüssigkeitsdruck p_m wurden in axialer Richtung die ersten 25 Fourier-Glieder nach Glg. 2.45 berücksichtigt.

Für die numerische Umsetzung wurde das Programm ©MATLAB R11 [69] verwendet. Die Auswertung der Integralausdrücke erfolgte mit der in ©MATLAB R11 enthaltenen Standardfunktion quad8.

In der Abb. 2.3 ist der beschriebene Berechnungsablauf zusammenfassend dargestellt.

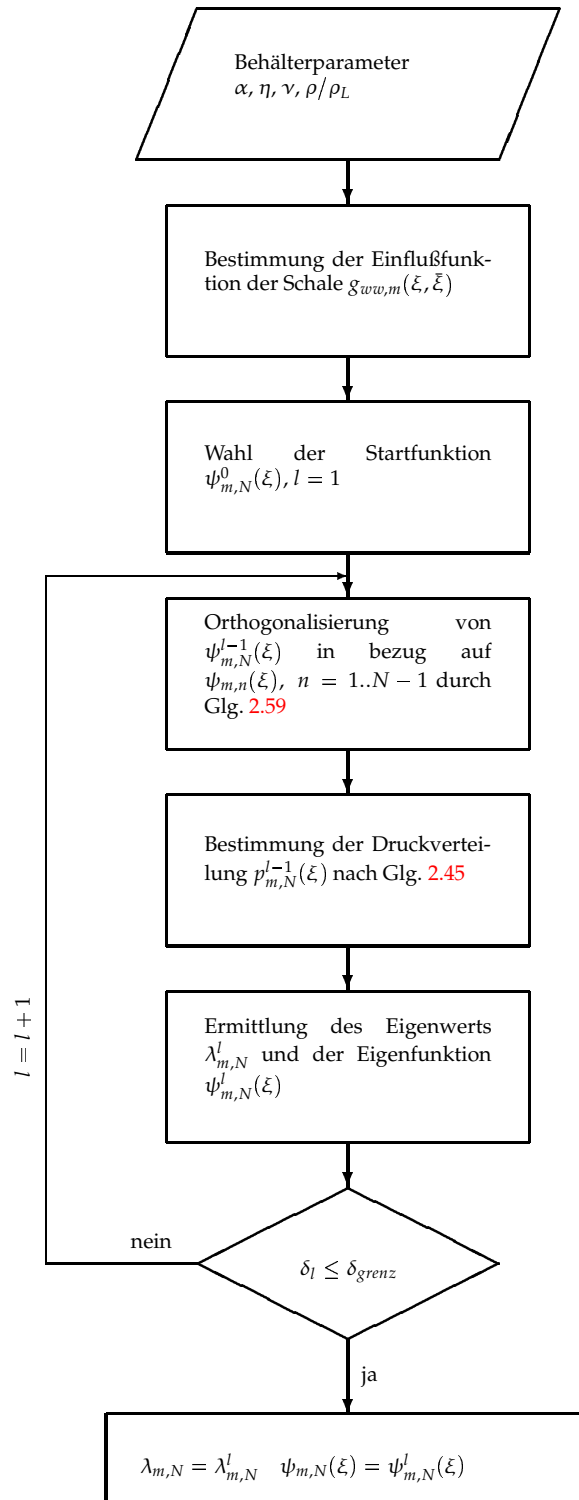


Abb. 2.3: Berechnungsablauf zur Bestimmung des Eigenwerts $\lambda_{m,N}$ und der Eigenfunktion $\psi_{m,N}(\xi)$

2.3 Parameteruntersuchung

2.3.1 Ergebnisse für den 1. Biegemode

Bei Vernachlässigung der Schalenmasse nimmt die Integralgleichung für die Schale die besonders einfache Form von Glg. 2.47 an. Auf der Grundlage dieser Gleichung wurden für die 0. und 1. Umfangsharmonische die Eigenwerte und -funktionen für den 1. Biegemode berechnet. Die Druckverteilungen sowie die daraus resultierenden Kräfte, die Höhenordinaten der Angiffspunkte dieser Kräfte und die Modupartizipationsfaktoren können aus den ermittelten Eigenformen bestimmt werden.

Da die Trägheitskräfte der Schale vernachlässigt werden, sind nur wenige Geometrie- und Materialparameter zur Beschreibung des Schale-Flüssigkeit-Systems erforderlich. Das sind der Behälterradius R , die Behälterhöhe H , die Wandstärke d , die Querdehnzahl und der Elastizitätsmodul des Schalenmaterials ν und E sowie die Dichte der Flüssigkeit ρ_L . Für die Zylinderschale sind weiterhin die Lagerungsbedingungen der Ränder vorzugeben. Zur Beschreibung der Eigenschwingung des Zylinderschale-Flüssigkeit-Systems werden die folgenden dimensionslosen Größen (Kennzahlen) verwendet: Behälterschlantheit $\alpha = H/R$, Verhältnis Radius zu Wandstärke $\eta = R/d$ und Frequenzfaktor $C_{m,n} = E/(\rho_L R^2 \omega_{m,n}^2)$. Die untersuchten Geometrie- und Materialparameter sind in Abb. 2.4 dargestellt. Die Berechnungsergebnisse werden als normierte Größen in bezug auf Behälterradius bzw. -höhe, Elastizitätsmodul und Dichte der Schale bzw. der Flüssigkeit angegeben.

Die Ergebnisse wurden mit eigenen numerischen Untersuchungen, den Angaben von Tang [67], Malhotra [44] und den Näherungsformeln aus *Anhang A* verglichen.

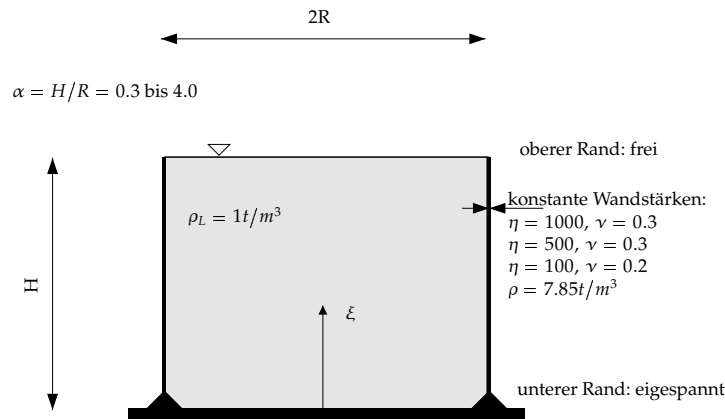


Abb. 2.4: Behälterkenngrößen für die Parameteruntersuchung.

0. Umfangsharmonische

Für die radiale Wandeigenform im 1. Biegemode wird oft näherungsweise die Funktion: $\psi_{0,1}(\xi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$ (s.a. *Anhang A*) verwendet. Wie die Abb. 2.5 verdeutlicht, ist das aber nur bei dünnwandigen Behältern ($R/d \geq 500$) oder einer membrangerechten Lagerung zutreffend. Die abgebildeten Eigenformen wurden so normiert, daß ihr Skalarprodukt 0.5 ergibt. Die Einspannung am Behälterfuß bewirkt insbesondere bei gedrungenen Behältern ($\alpha \leq 0.8$) und großen Wandstärken ($R/d \leq 500$) eine Verkleinerung der radialen Verschiebungen im unteren Wandbereich. Dadurch verringern sich ebenfalls die Druckordinaten und die damit verbundenen Ersatzgrößen. Mit der Näherung der Wandeigenform durch eine cos-Funktion ist es nicht möglich, die Wirkung der Einspannung zu erfassen.

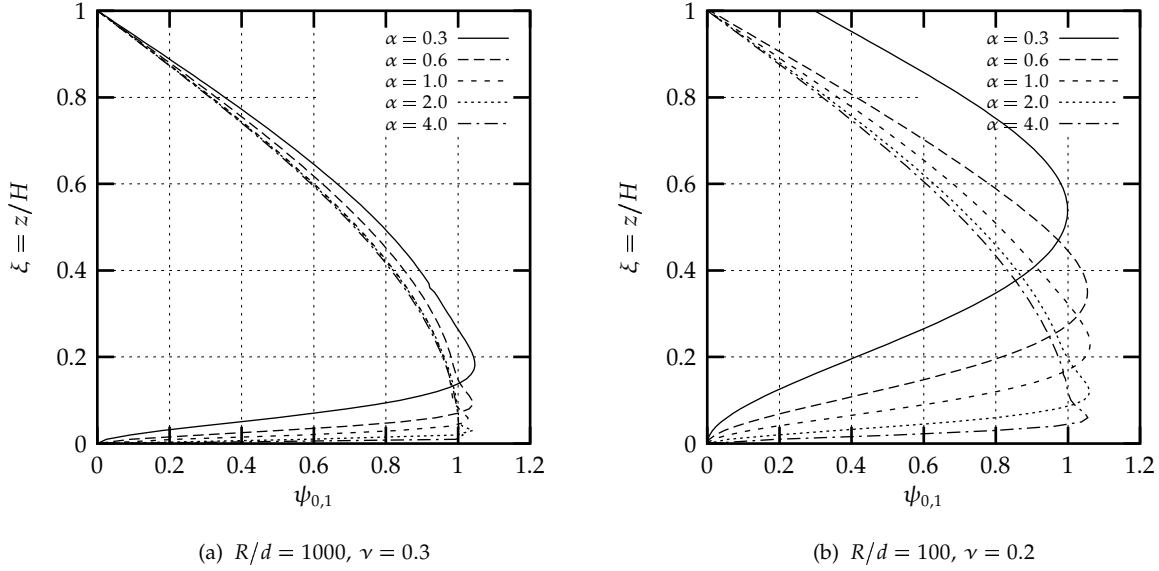


Abb. 2.5: Radiale Wandeigenform $\psi_{0,1}$, 1. Biegemode und 0. Umfangsharmonische.

Die bei einer Spektralbeschleunigung $S_{a,z,1}^{rel}(t)$ auftretenden relativen radialen Verschiebungen der Schalenwand berechnen sich nach Glg. 2.60:

$$w_{0,1}(\xi, \varphi, t) = \psi_{0,1}(\xi) \Gamma_{0,1} S_{a,z,1}^{rel}(t) \quad (2.60)$$

Mit den Wandeigenformen ändern sich auch die Druckverteilungen. Sie sind in Abb. 2.6 als normierte Druckverteilungen $\bar{p}_{0,1} = p_{0,1}/(\rho_L H S_{a,z,1}^{rel})$ angegeben. Der Modepartizipationsfaktor $\Gamma_{0,1}$ ist bereits berücksichtigt. Die normierten Druckverteilungen werden aus den Wandeigenformen nach folgender Gleichung bestimmt:

$$\bar{p}_{0,1}(\xi, \zeta, \varphi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{\mu_n}{\alpha} \zeta\right)}{\mu_n I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \int_0^1 \psi_{0,1}(\xi) \cos(\mu_n \xi) d\xi \cos(\mu_n \xi) \Gamma_{0,1} \quad (2.61)$$

Die tatsächlichen Druckverteilungen berechnen sich wie folgt:

$$p_{0,1}(\xi, \zeta, \varphi, t) = \rho_L H \bar{p}_{0,1} S_{a,z,1}^{rel}(t) \quad (2.62)$$

Für große Wandstärken ($\eta = 100$) und gedrungene Behälter ($\alpha \leq 0.8$) weichen sie beträchtlich von den Druckverteilungen unter Annahme einer cos-Wandeigenform (s.a. Anhang A) ab.

In Abb. 2.7 sind Frequenzfaktoren ($C_{0,1}$ -Werte) zur Bestimmung der 1. Eigenfrequenz angegeben. Sie wird nach der Gleichung 2.63 berechnet:

$$\omega_{0,1} = \frac{C_{0,1}}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.63)$$

Die Ergebnisse zeigen, daß bis zu einer bezogene Wandstärke von $R/d = 500$ die Schalenmasse zur Bestimmung der 1. Eigenfrequenz vernachlässigt werden kann. Bei großen Wandstärken ($R/d \leq 500$) und gedrunge Behältern ($\alpha \leq 0.5$) werden zu hohe erste Eigenfrequenzen ermittelt.

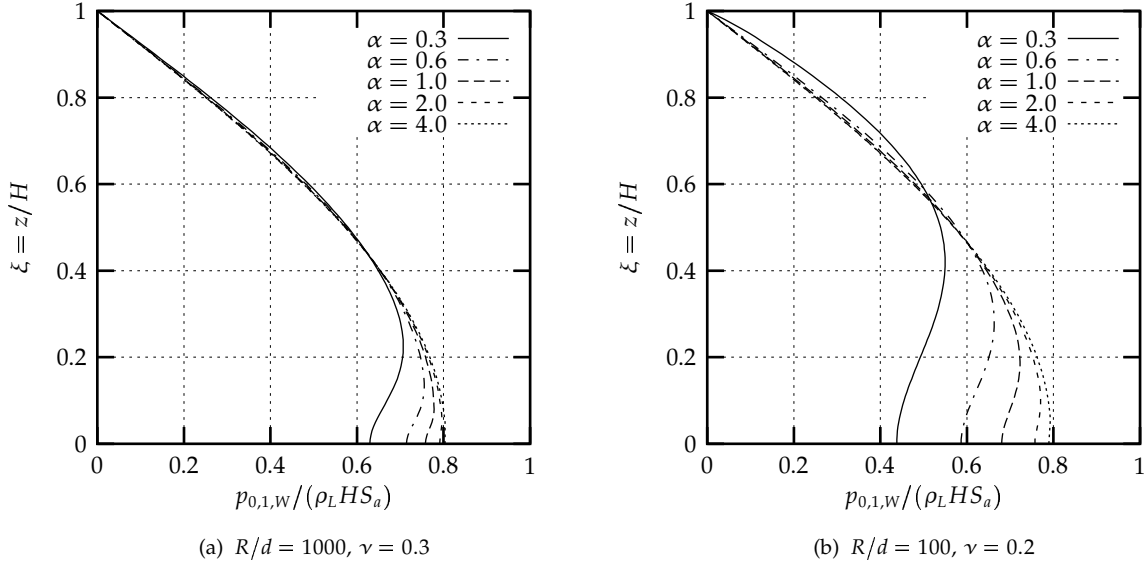


Abb. 2.6: Druckverteilungen an der Behälterwand, 1. Biegemode und 0. Umfangsharmonische.

In den Erdbebenbaunormen ([14, 2]) wird für die ingenieurmäßige Bestimmung der 1. Eigenfrequenz die Glg. A.36 aus *Anhang A, Tafel VI* angegeben. Die Glg. A.36 geht von einer \cos -Funktion für den ersten Biegemode der Schale aus. Für Stahlbehälter mit geringer Wandstärke $R/d \geq 1000$ ist diese Annahme noch zutreffend. Bei Behältern mit größerer Wandstärke $R/d \leq 500$ liefert die Glg. A.36 unbefriedigende Ergebnisse (Abb. 2.7).

Der Modepartizipationsfaktor $\Gamma_{0,1}$ wird nach der Glg. 2.64 bestimmt. Er ist von der Normierung der Eigenfunktionen abhängig.

$$\Gamma_{0,1} = \frac{\int_0^1 (1 - \xi) \psi_{0,1}(\xi) d\xi}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} \frac{I_0\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} d_n^2} \quad \text{mit: } d_n = \int_0^1 \psi_{0,1}(\xi) \cos(\mu_n \xi) d\xi \quad (2.64)$$

In der Abb. 2.8 sind die Ersatzmassen für das Zylinderschale-Flüssigkeit-System dargestellt. Sie stellen die resultierende Kraft aus dem dynamischen Druck bezogen auf die Fußpunktbeschleunigung dar und sind in Abhängigkeit von der Behälterschlantheit und der bezogenen Wandstärke angegeben. Der Modfaktor ist in diesen Werten bereits enthalten. Die Ersatzmasse berechnet sich aus dem dynamischen Druck auf den Behälterboden mit der radialen Wandeigenform nach Glg. 2.65.

$$M_{DV} = 4\alpha M_L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \int_0^1 \psi_{0,1}(\xi) \cos(\mu_n \xi) d\xi \quad (2.65)$$

Die Ersatzmassen sind von der Wandstärke des Behälters abhängig. Mit Zunahme der Wanddicke verringert sich die resultierende Kräfte auf den Behälterboden (Abb. 2.8).

Die auf den Behälterboden wirkende resultierende Kraft ergibt sich aus Glg. 2.66. Es ist die relative Spektralbeschleunigung $S_{a,z,1}^{rel}(t)$ zu verwenden. Sie ist abhängig von der Eigenfrequenz und der Dämpfung.

$$F_{DV}(t) = M_{DV} S_{a,z,1}^{rel}(t) \quad (2.66)$$

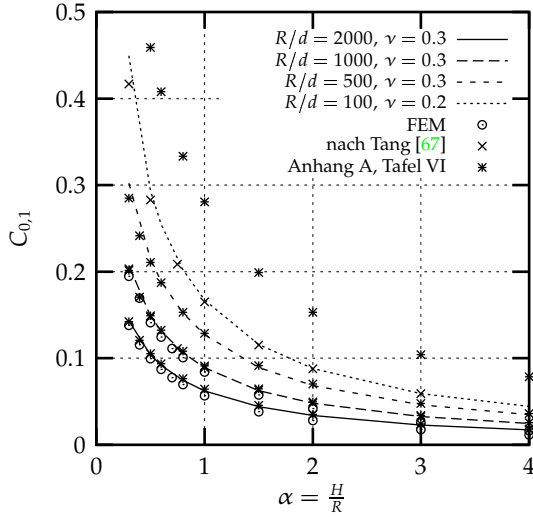


Abb. 2.7: $C_{0,1}$ -Werte für die Eigenfrequenz, 1. Biegemode und 0. Umfangsharmonische.

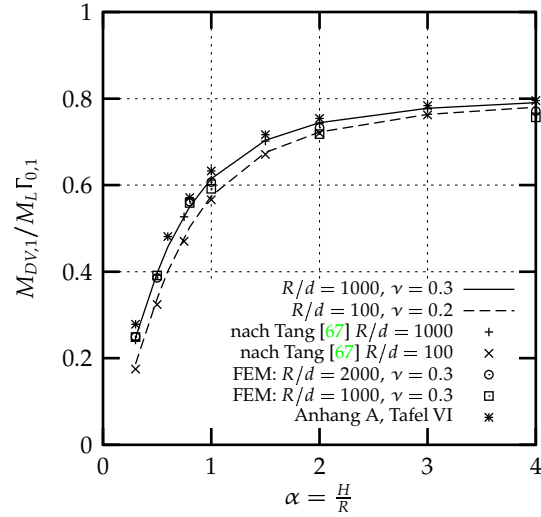


Abb. 2.8: Normierte Ersatzmassen, 1. Biegemode und 0. Umfangsharmonische.

1. Umfangsharmonische

In der Abb. 2.9 sind die radialen Wandeigenformen für $R/d = 1000$ und 100 und verschiedene Behälterschlantheiten dargestellt. Sie sind ebenfalls so normiert, daß ihr Skalarprodukt 0.5 ergibt.

Für die radialen Wandeigenformen werden als Näherung trigonometrische oder lineare Funktion vorgeschlagen (s.a. [17], *Anhang A*). Wie aus Abb. 2.9 zu entnehmen ist, weichen die tatsächlichen Eigenformen beträchtlich von dieser Näherung ab. Nur für sehr schlanke Behälter ($\alpha = 4$) ist es möglich, für die radiale Wandeigenform eine lineare Funktionen $\psi_{1,1}(\xi) = \xi$ zu verwenden.

Bei großen Wandstärken führt die Einspannung der Schale am unteren Fußpunkt zu einer Verringerung der radialen Verschiebungen. Die relativen radialen Verschiebungen der Schale berechnen sich aus Glg. 2.67 mit der relativen Spektralbeschleunigung $S_{a,x,1}^{rel}(t)$.

$$w_{1,1}(\xi, \varphi, t) = \psi_{1,1}(\xi) \cos \varphi \Gamma_{1,1} S_{a,x,1}^{rel}(t) \quad (2.67)$$

Die normierten Druckverteilungen berechnen sich aus den Wandeigenformen mit der Glg. 2.68. Eine Vergrößerung der Wandstärke bewirkt eine Reduzierung der Druckverteilungen im unteren Schalenbereich. In Abb. 2.10 sind sie für $R/d = 1000$ und 100 dargestellt.

$$\bar{p}_{1,1}(\xi, \zeta, \varphi) = 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n \xi)}{\mu_n} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha} \zeta\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \int_0^1 \psi_{1,1}(\xi) \cos(\mu_n \xi) d\xi \Gamma_{1,1} \cos \varphi \quad (2.68)$$

Wenn nur die 1. Wandeigenform berücksichtigt wird, so ist zur Bestimmung des Gesamtdruckes infolge der Fußpunktbeschleunigung $a_x(t)$ der Schale der Druck aus der Relativbewegung von Schale und Flüssigkeit $p_{1,1}$ mit dem aus der Starrkörperbewegung p_{BH} zu überlagern (*Anhang A, Tafel IV*). Zur Berechnung des Drucks aus der Relativbewegung der Behälterwand ist die Relativbeschleunigung $S_{a,x,1}^{rel}$ zu verwenden Glg. 2.69.

$$p(\xi, \zeta, \varphi, t) = \rho_L R \left[\bar{p}_{1,1}(\xi, \zeta, \varphi) S_{a,x,1}^{rel}(t) + \bar{p}_{BH}(\xi, \zeta, \varphi) a_x(t) \right] \quad (2.69)$$

Werden auch höhere Eigenformen berücksichtigt, so kann der Gesamtdruck allein mit den Druckverteilungen aus den Eigenformen berechnet werden (s.a. *Abschnitt 2.3.6*). Dann sind jedoch die

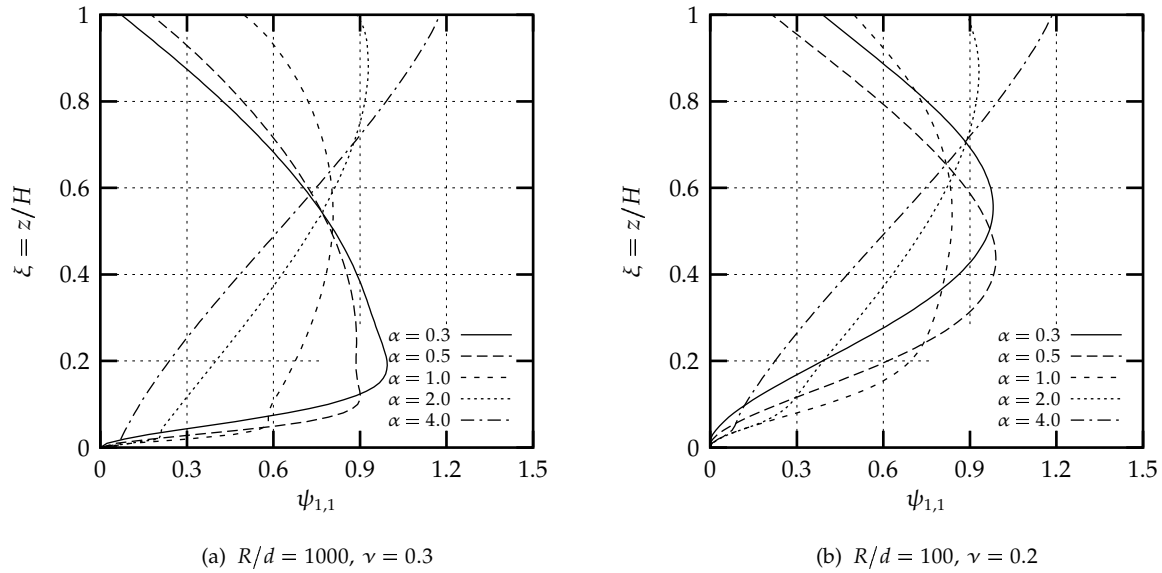
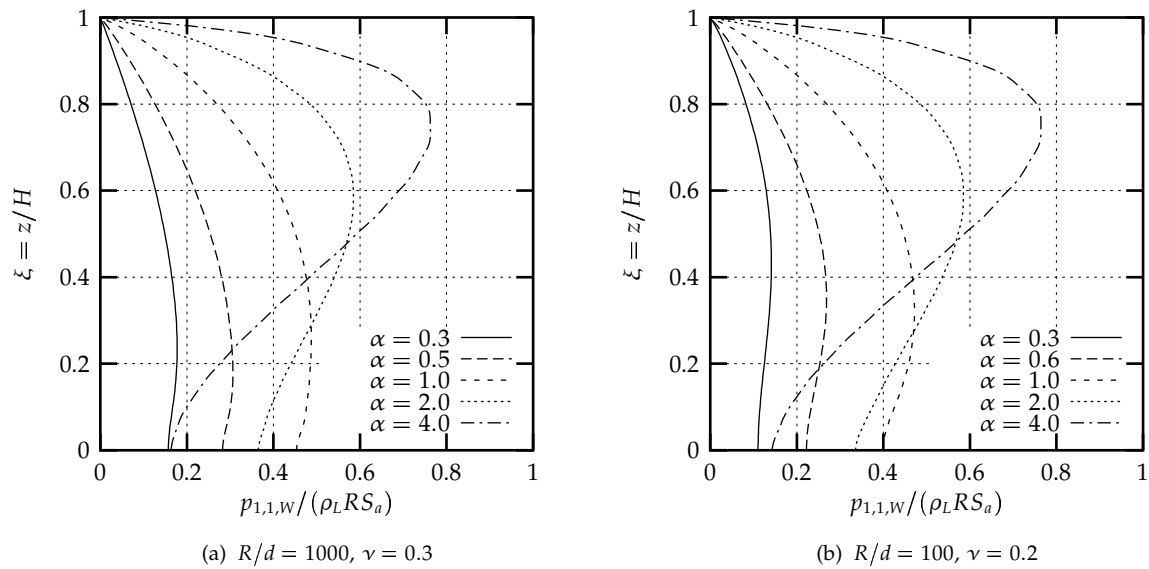
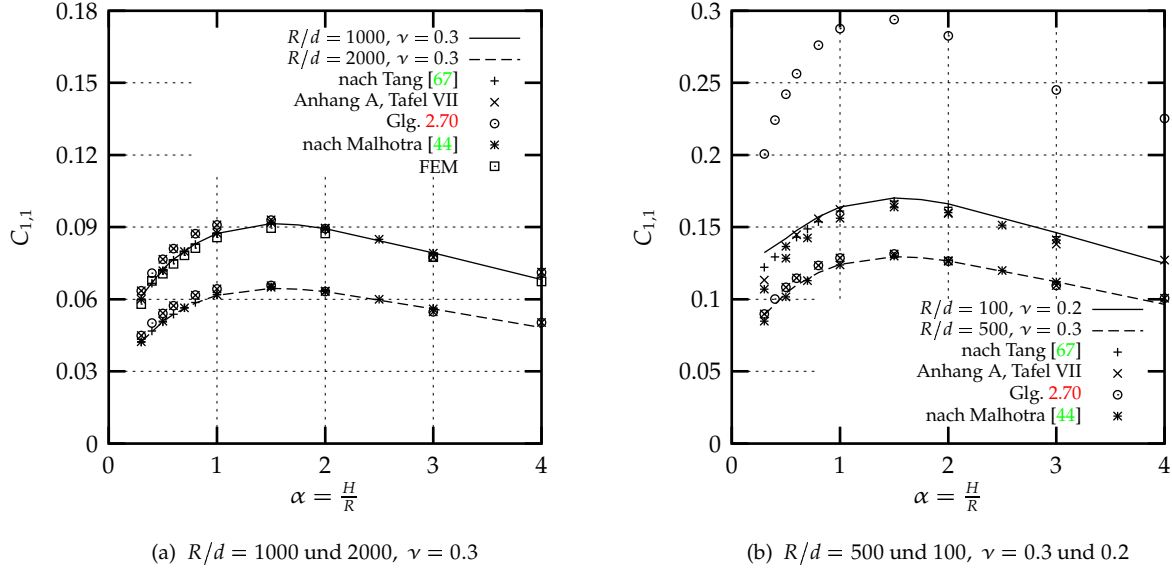
Abb. 2.9: Radiale Wandeigenform $\psi_{1,1}(\xi)$, 1. Biegemode und 1. Umfangsharmonische.

Abb. 2.10: Druckverteilungen an der Behälterwand, 1. Biegemode und 1. Umfangsharmonische.

absoluten Spektralbeschleunigungen $S_{a,x,n}^{abs}$ zu verwenden.

Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen können wie für die 0. Umfangsharmonische Frequenzfaktoren $C_{1,1}$ angegeben werden. In der Abb. 2.11(a) sind sie für die konstanten Wandstärken $R/d = 2000$ und 1000 dargestellt. Die $C_{1,1}$ -Werte für diese Wandstärken stimmen gut mit den Ergebnissen aus FE-Berechnungen sowie denen anderer Autoren (Tang [67], Malhotra [43]) überein. Auch die Näherungsformel nach Anhang A, Tafel VII liefert Werte, die nur um ca. 5% abweichen. Bei einer Wandstärke von $R/d = 100$ sind die Unterschiede zwischen den Ergebnissen größer

Abb. 2.11: $C_{1,1}$ -Werte, 1. Biegemode und 1. Umfangsharmonische.

und betragen bis zu 30%. Es ist deshalb für $R/d \leq 500$ nicht mehr zulässig, die Trägheitskräfte der Schale zu vernachlässigen. In Abb. 2.11(b) sind die Frequenzfaktoren für $R/d = 500$ und 100 dargestellt.

Die erste Eigenfrequenz berechnet sich mit den in Abb. 2.11 angegebenen $C_{1,1}$ -Werten nach der Glg. 2.70:

$$\omega_{1,1} = \frac{C_{1,1}}{H} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.70)$$

Für die ingenieurmäßige Bestimmung der ersten Eigenfrequenz wird in den Erdbebenbaunormen ([14, 2]) die Glg. 2.71 angegeben:

$$\omega_{1,1} = \frac{\pi}{R} (0.01675\alpha^2 - 0.15\alpha + 0.46) \sqrt{\frac{Ed}{\rho_L H}} = \frac{C_{1,1}}{H} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.71)$$

mit:

$$C_{1,1} = \pi (0.01675\alpha^2 - 0.15\alpha + 0.46) \sqrt{\frac{\rho}{\rho_L}} \sqrt{\frac{\alpha}{\eta}}$$

Wie die Abb. 2.11 zeigt, ist die Glg. 2.71 nur für dünnwandige Stahlbehälter $R/d \geq 1000$ mit ausreichender Genauigkeit zutreffend.

Der Modepartizipationsfaktor $\Gamma_{1,1}$ wird nach der Glg. 2.72 ermittelt (s.a. Tang [67]). Er ist von der Normierung der Eigenformen abhängig.

$$\Gamma_{1,1} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\alpha}{\mu_n} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right) + I_2\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} d_{1,n} d_{2,n}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\alpha}{\mu_n} \frac{I_0\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right) + I_2\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} d_{1,n}^2} \quad (2.72)$$

mit:

$$d_{1,n} = \int_0^1 \psi_{1,1}(\xi) \cos(\mu_n \xi) d\xi \quad d_{2,n} = \int_0^1 \cos(\mu_n \xi) d\xi$$

Mit Hilfe der Ersatzmassen nach *Abschnitt 2.6* kann das Schale-Flüssigkeit-Kontinuum durch ein diskretes System von entkoppelten Einmassenschwingern ersetzt werden. Die Ersatzmasse ist die Resultierende des Drucks auf die Behälterwand dividiert durch die Spektralbeschleunigung. Sie berechnet sich nach Glg. 2.73:

$$M_{DH} = 2\alpha M_L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n^2} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \int_0^1 \psi_{1,1}(\xi) \cos(\mu_n \xi) d\xi \Gamma_{1,1} \quad (2.73)$$

Die Ersatzmassen sind nur geringfügig von der Wandstärke abhängig. Mit den FE-Berechnungen werden etwas geringere Ersatzmassen bestimmt. In der Abb. 2.12 sind die mit den Modupartizipationsfaktor multiplizierten Ersatzmassen angegeben.

Die auf die Behälterwand wirkende resultierende horizontale Kraft infolge der Interaktions-schwingung im 1. Biegemode erhält man mit den Ersatzmassen aus Glg. 2.74.

$$F_{DH}(t) = M_{DH} S_{a,x,1}^{rel}(t) \quad (2.74)$$

Die antisymmetrischen Druckverteilungen auf die Behälterwand und den Behälterboden rufen Umsturzmomente hervor. Mit den Glg. 2.75 und 2.76 können diese Umsturzmomente bezogen auf das Produkt von Flüssigkeitsmasse, Behälterhöhe und Spektralbeschleunigung bestimmt werden.

$$\frac{M_{DH} H_{DHW}}{M_L H} = 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n (-1)^{n+1} - 1}{\mu_n^3} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \int_0^1 \psi_{1,1}(\xi) \cos(\mu_n \xi) d\xi \Gamma_{1,1} \quad (2.75)$$

$$\frac{M_{DH} H_{DHB}}{M_L H} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} \frac{I_2\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \int_0^1 \psi_{1,1}(\xi) \cos(\mu_n \xi) d\xi \Gamma_{1,1} \quad (2.76)$$

Mit der Höhenordinate H_{DHW} wird der Angriffspunkt der resultierenden horizontalen Kraft an der Behälterwand angegeben. Die Höhenordinate H_{DHB} entspricht der Höhe, in der die horizontale Kraft angebracht werden muß, damit ein Umsturzmoment erzeugt wird, das dem aus der antisymmetrischen Druckverteilung auf den Behälterboden entspricht. Bei einer Veränderung der Wandstärke ändern sich die Umsturzmomente nur geringfügig. Die Höhenordinaten sind in Abb. 2.13 in Abhängigkeit von Behälterschlantheit α und von $\eta = R/d$ angegeben.

Veränderliche Wandstärke

Bei den meisten Behältern ist die Wandstärke entsprechend dem statischen Druckverlauf abgestuft. Das vorgestellte Berechnungsverfahren wurde nur auf Behälter mit konstanter Wandstärke angewendet. Eine Erweiterung auf Zylinderschalen mit abgestufter Wanddicke ist ohne Schwierigkeiten möglich.

Zur Ermittlung der Eigenfrequenzen bei veränderlicher Wanddicke kann näherungsweise mit konstanter Wanddicke gerechnet werden. Es ist dafür die Wanddicke am Drittelpunkt der Behälterhöhe (bei $\xi = 1/3$) zu verwenden (s.a. Scharf [54]).

Die Antwortgrößen sind für Behälter mit abgestufter Wand gegenüber denen mit konstanter Wanddicke geringer. Es treten im Bereich des Behälterfußes kleinere Druckordinaten auf. Entsprechend verringern sich auch die Ersatzmassen. Die Höhenordinaten der resultierenden horizontalen Kräfte ändern sich durch eine abgestufte Wanddicke nur geringfügig. Eine Berechnung mit konstanter Wanddicke führt zu konservativen Ergebnissen.

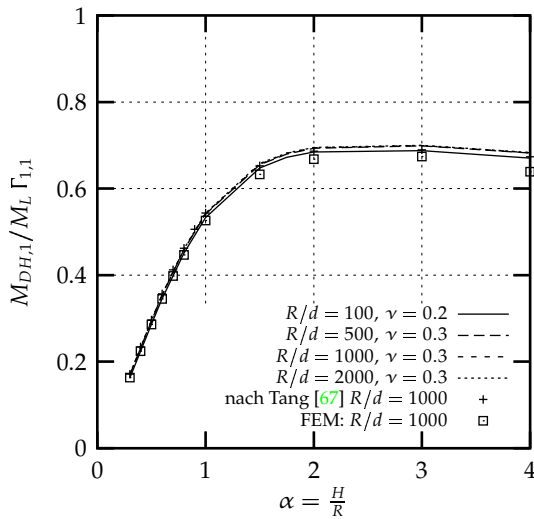


Abb. 2.12: Normierte Ersatzmassen, 1. Biegemode und 1. Umfangsharmonische.

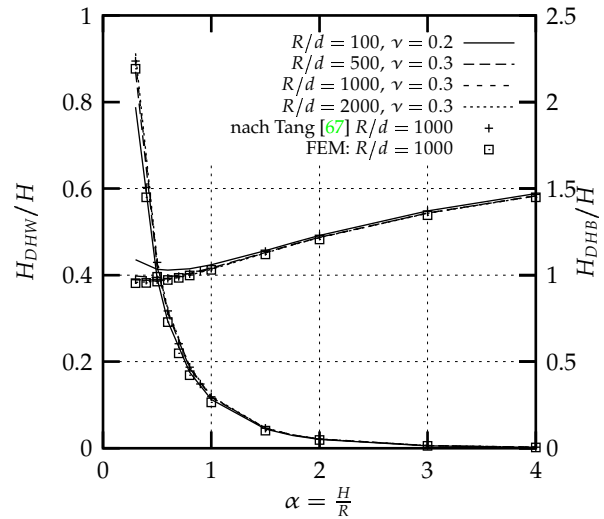


Abb. 2.13: Normierte Höhenordinaten der Ersatzmassen.

Dachform

Hinsichtlich der Dachform werden Behälter mit Schwimmdach und mit Festdach unterschieden.

Bei Schwimmdächern kann davon ausgegangen werden, daß sie keinen Einfluß auf das dynamische Verhalten des Behältertragwerks besitzen.

Die Festdachkonstruktionen werden durch Kegel- bzw. Kugelsegmenten gebildet. Zur Untersuchung des Einflusses eines Kugeldachs auf die Eigenfrequenzen wurden Berechnungen auf der Basis der FEM durchgeführt. Für das Kugelsegment wurde eine Schalendicke von 5 mm verwendet. Für den Radius des Kugelsegments wurde der zwei- bzw. dreifache Zylinderschalenradius gewählt. Diese Angaben entsprechen gebräuchlichen Abmessungen (s.a. Scharf [54]).

Es zeigte sich, daß die Eigenfrequenzen und die modalen Antwortgrößen nur sehr geringfügig von der Dachkonstruktion beeinflusst werden. Die Unterschiede bei den Eigenfrequenzen betragen weniger als 1%.

Mit der Integralgleichungsmethode ist es auch möglich, eine rotationssymmetrische Dachkonstruktion zu berücksichtigen.

2.3.2 Ergebnisse für höhere Biegemodes

Insbesondere für schlanke Behälter ($\alpha > 1$) ist es nicht ausreichend, zur Ermittlung der seismischen Antwortgrößen nur die 1. Biegeeigenform zu berücksichtigen. Es ist erforderlich, auch höhere Modes zu beachten. Mit der Integralgleichungsmethode ist, wie in Abschnitt 2.2.6 dargestellt, auch die Berechnung höherer Eigenformen und Eigenwerte möglich.

Nachfolgend wird der Berechnungsablauf zur Ermittlung höherer Biegemodes angegeben. Anschließend werden die Ergebnisse einer Parameteruntersuchung dargestellt. Sie zeigen die Einflüsse der höheren Biegemodes. In der Abb. 2.14 sind die dazu verwendeten Behälterkennwerte abgebildet.

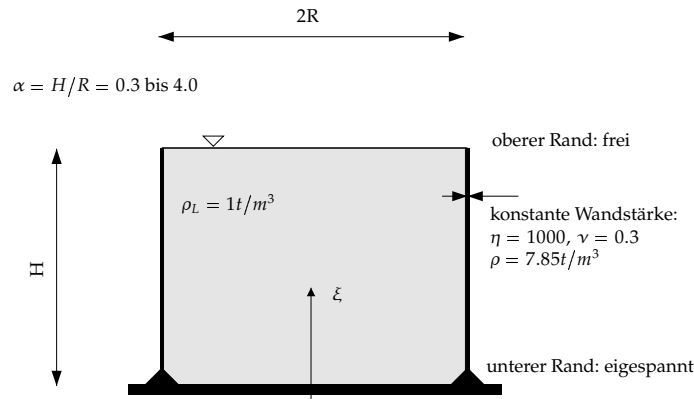


Abb. 2.14: Behälterkennwerte für die Parameteruntersuchung.

Berechnungsablauf

Der Berechnungsablauf zur Ermittlung der höheren Eigenfunktionen und Eigenwerte des Kerns wurde schon in *Abschnitt 2.2.6* angegeben. Es werden in diesem Abschnitt die Besonderheiten aufgeführt, die bei Flüssigkeitsbehältern auftreten.

Zur Bestimmung des N -ten Biegemodes wird wieder eine beliebige Funktion $\psi_{m,n}^0(\xi)$ für die radialen Verschiebungen der Zylinderschale gewählt. Aus dieser Funktion werden die Anteile der Eigenfunktionen 1 bis $N - 1$ auf Grundlage der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenfunktionen herausgelöst. Zur Herauslösung der Anteile der Eigenfunktionen 1 bis $N - 1$ sind im l -ten Iterationsschritt für die 0. Umfangsharmonische die Glg. 2.77 und für die 1. Umfangsharmonische die Glg. 2.78 anzuwenden.

$$\psi_{0,N}^l = \psi_{0,N}^l - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k} \frac{I_0\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)}{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} d_{k,N} d_{k,n} \psi_{0,n} \quad (2.77)$$

$$\psi_{1,N}^l = \psi_{1,N}^l - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\mu_k} \frac{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right) + I_2\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} d_{k,N} d_{k,n} \psi_{1,n} \quad (2.78)$$

Mit den Gleichungen 2.79 und 2.80 ist die Normierung der Funktion $\psi_{m,N}^l$ vorzunehmen.

$$\psi_{0,N}^l = \frac{\psi_{0,N}^l}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k} \frac{I_0\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)}{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} d_{k,N}^2}} \quad (2.79)$$

$$\psi_{1,N}^l = \frac{\psi_{1,N}^l}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\mu_k} \frac{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right) + I_2\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} d_{k,N}^2}} \quad (2.80)$$

Es sind die folgenden Hilfsgrößen zu verwenden:

$$d_{k,N} = \int_0^1 \psi_{m,N}^l \cos(\mu_k \xi) d\xi \quad d_{k,n} = \int_0^1 \psi_{m,n}^l \cos(\mu_k \xi) d\xi$$

Die Ermittlung der Eigenwerte erfolgt analog zum 1. Biegemode. Es ist zu beachten, daß die Eigenwertermittlung vor der Normierung durchgeführt wird. Zur Bestimmung des N -ten Biegemodes müssen alle vorhergehenden Modes 1 bis $N - 1$ berechnet werden.

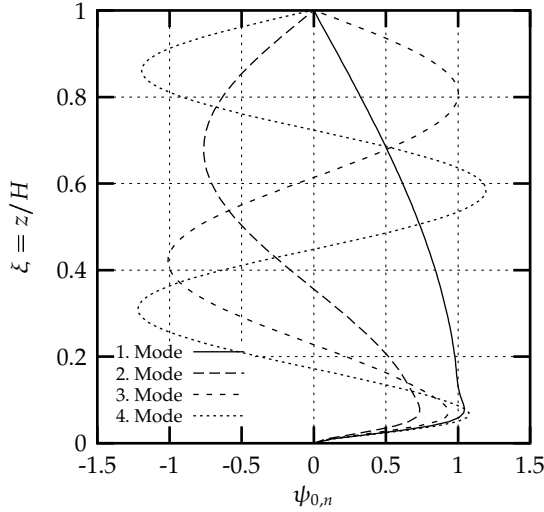


Abb. 2.15: Radiale Wandeigenform $\psi_{0,n}$, 0. Umfangsharmonische und $\alpha = 1.0$, $R/d = 1000$, $\nu = 0.3$.

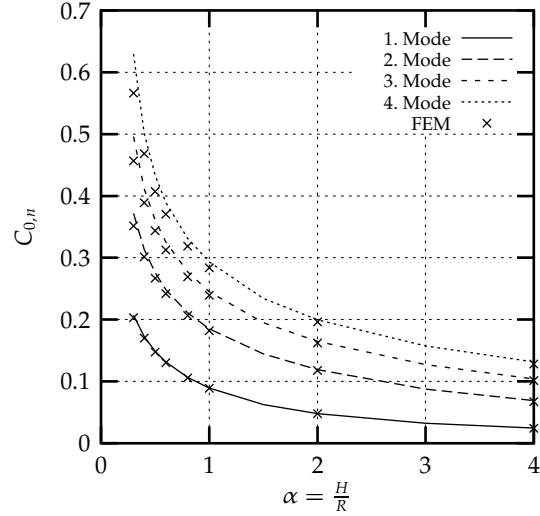


Abb. 2.16: $C_{0,n}$ -Werte, 0. Umfangsharmonische und $R/d = 1000$, $\nu = 0.3$.

Ergebnisse für die 0. Umfangsharmonische

Für die Berechnung der tatsächlich auftretenden relativen radialen Verschiebungen im jeweiligen Biegemode ist die Glg. 2.60 anzuwenden. In der Abb. 2.15 sind die Eigenformen für den 1. bis 4. Mode bei einer Behälterschlankheit von 1.0, einer konstanten Wandstärke ($R/d = 1000$) und einer Querdehnzahl von $\nu = 0.3$ dargestellt. Die Eigenformen wurden so normiert, daß ihr Skalarprodukt 0.5 beträgt.

Die Eigenfrequenzen können mit den dimensionslosen Frequenzfaktoren $C_{0,n}$ der Abb. 2.16 durch die Glg. 2.63 bestimmt werden. Im Vergleich zu den Berechnungen auf Grundlage der FEM werden die Eigenfrequenzen etwas zu hoch ermittelt. Die Unterschiede werden bei höheren Modes und gedrungeneren Behältern größer. Für den 4. Mode und eine Behälterschlankheit von $\alpha = 0.3$ betragen sie ca. 10%. Im 2. Mode und bei $\alpha = 0.3$ beträgt die Differenz noch ca. 5%. Die Ursache dafür ist die Vernachlässigung der Schalenmasse.

Wie für den ersten Biegemode können auch für höhere Modes normierte, modale Druckverteilungen angegeben werden (Glg. 2.61). Der Gesamtdruck ist mit Glg. 2.81 zu bestimmen.

$$p_0(\xi, \zeta, \varphi, t) = \rho_L R \sum_{n=1}^4 \bar{p}_{0,n}(\xi, \zeta) S_{a,z,n}^{rel}(t) + \rho_L H(1 - \xi) a_z(t) \quad (2.81)$$

Es ist zu beachten, daß hier die relative Spektralbeschleunigung verwendet werden muß.

Die Ersatzmassen des Schale-Flüssigkeit-Kontinuums werden analog zum ersten Biegemode nach Glg. 2.65 bestimmt. In den Integralausdruck der Glg. 2.65 sind die Eigenformen des entsprechenden Modes einzusetzen.

In der Abb. 2.17 sind die auf den Behälterboden wirkenden Ersatzmassen M_{DV}/M_L dargestellt. Der Modepartizipationsfaktor ist in den Werten enthalten. Er wird nach Glg. 2.64 bestimmt. In der Glg. 2.64 ist ebenfalls die Eigenform des jeweiligen Modes zu verwenden.

Für die Interaktionsschwingung in der 0. Umfangsharmonischen ist für eine vereinfachte Berechnung die Berücksichtigung des 1. Biegemodes ausreichend. Höhere Modes liefern nur sehr kleine Druckanteile.

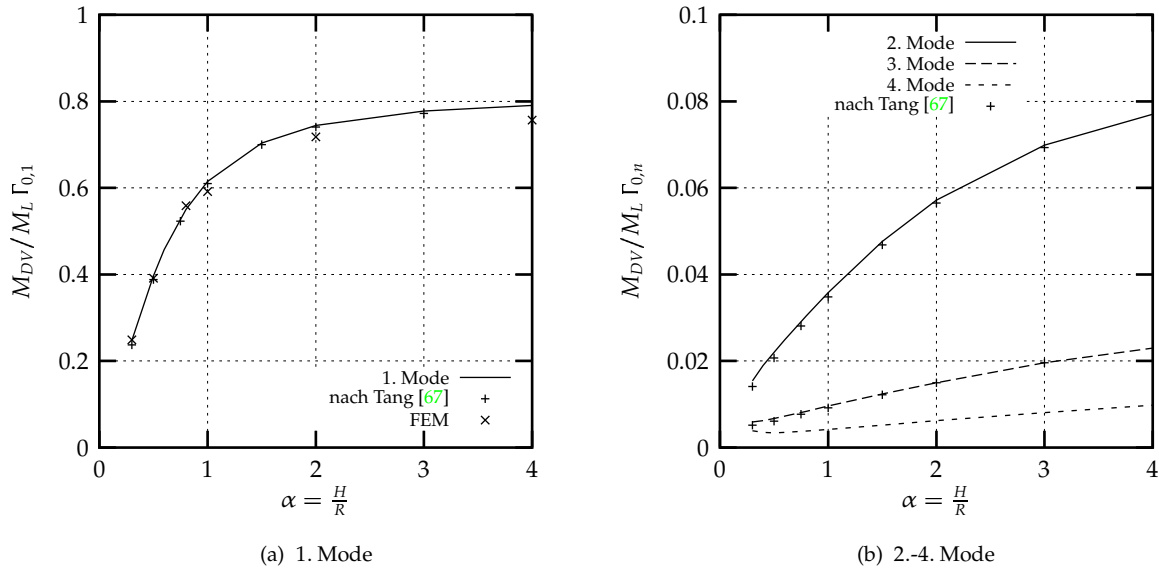


Abb. 2.17: Normierte Ersatzmassen, 0. Umfangsharmonische und $R/d = 1000$, $\nu = 0.3$.

Die bei einer vertikalen Fußpunktanregung auftretende vertikale Gesamtkraft kann nach Glg. 2.82 bestimmt werden.

$$F_V(t) = \sum_{n=1}^4 M_{DV,n} S_{a,z,n}^{rel}(t) + M_L a_z(t) \quad (2.82)$$

Ergebnisse für die 1. Umfangsharmonische

In der Abb. 2.18 sind die Eigenformen für den 1. bis 4. Biegemode der 1. Umfangsharmonischen für eine Behälterschlankheit von $\alpha = 1.0$ und eine konstante Wandstärke $R/d = 1000$ bei der Querdehnzahl $\nu = 0.3$ dargestellt. Die Eigenformen wurden so normiert, daß ihr Skalarprodukt 0.5 beträgt.

Die Eigenfrequenzen können wieder mit den Frequenzfaktoren $C_{1,n}$ und der Glg. 2.70 bestimmt werden.

Die Vernachlässigung der Schalenmasse macht sich besonders bei hohen Biegemodes und gedungenen Behältern bemerkbar. Für eine Schlankheit von $\alpha = 0.3$ betragen die Unterschiede im 1. bis 4. Biegemode 2, 5, 8 bzw. 10%. Bei einer Schlankheit von $\alpha = 4.0$ treten bis zum 4. Biegemode maximale Abweichungen von ca. 2% auf.

In der Abb. 2.19 sind die Frequenzfaktoren für den 1. bis 4. Biegemode der 1. Umfangsharmonischen bei konstanter Wandstärke $R/d = 1000$ angegeben.

Aus den Eigenformen können normierte modale Druckverteilungen bestimmt werden. Dazu ist die Glg. 2.68 anzuwenden. Die Druckverteilung infolge der Starrkörperverschiebung von Schale und Flüssigkeit kann durch die impulsiven Druckverteilungen aus der Relativbewegung ersetzt werden. Zur Bestimmung des Gesamtdrucks bei einer horizontalen Fußpunktbeschleunigung a_x muß dann die absolute Spektralbeschleunigung verwendet werden (Glg. 2.83). Es ist ausrei-

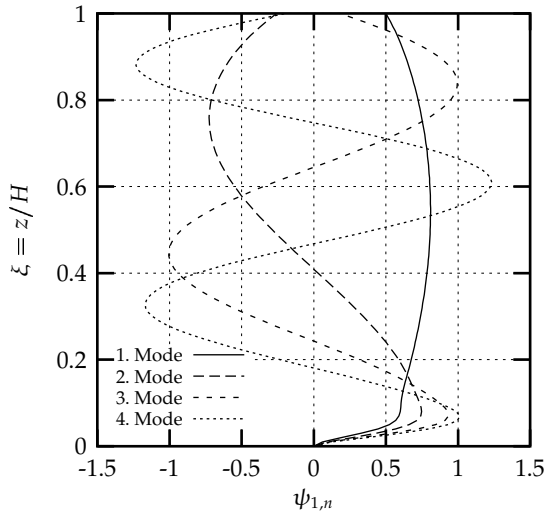


Abb. 2.18: Radiale Wandeigenform, 1. Umfangsharmonische und $\alpha = 1.0$, $R/d = 1000$, $\nu = 0.3$.

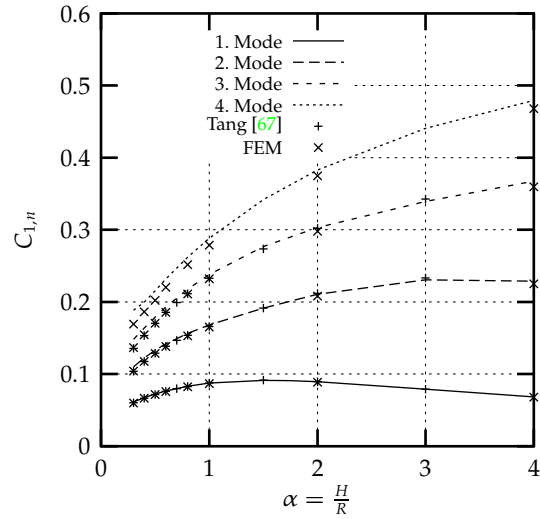


Abb. 2.19: $C_{1,n}$ -Werte, 1. Umfangsharmonische und $R/d = 1000$, $\nu = 0.3$.

chend, die ersten vier Biegemodes zu berücksichtigen.

$$p_1(\xi, \zeta, \varphi, t) = \rho_L H \sum_{n=1}^4 \bar{p}_{1,n}(\xi, \zeta, \varphi) S_{a,x,n}^{abs}(t) \quad (2.83)$$

In der Abb. 2.20 sind die normierten Druckverteilungen und die Überlagerung für eine Schlankheit $\alpha = 1.0$ und eine konstante Wandstärke $R/d = 1000$ angegeben.

Durch die modale Analyse kann das Schale-Flüssigkeit-Kontinuum durch voneinander unabhängige Einmassenschwinger beschrieben werden. Die zu dem jeweiligen Mode gehörenden Massen werden mit der Glg. 2.73 bestimmt.

Der Modepartizipationfaktor ist mit Glg. 2.72 zu ermitteln. In die Integralausdrücke sind wieder die Eigenformen des jeweiligen Modes einzusetzen.

Die Ersatzmassen aus der Starrkörperbewegung können in der 1. Umfangsharmonischen durch die Summe der impulsiven Massen infolge der Relativbewegung von Flüssigkeit und Schale ersetzt werden (Glg. 2.84). Es ist ausreichend, die ersten vier Biegemodes zu berücksichtigen.

$$M_{BH} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{DH,n} \approx \sum_{n=1}^4 M_{DH,n} \quad (2.84)$$

Die bei einer horizontalen Fußpunktanregung auftretende horizontale Gesamtkraft kann nach Glg. 2.85 bestimmt werden.

$$F_H(t) = \sum_{n=1}^4 M_{DH,n} S_{a,x,n}^{abs}(t) \quad (2.85)$$

In Abb. 2.21 sind die Ersatzmassen für die 1. Umfangsharmonische bei konstanter Wandstärke $R/d = 1000$ und $\nu = 0.3$ angegeben. Die Modepartizipationsfaktoren sind in den abgebildeten Werten enthalten.

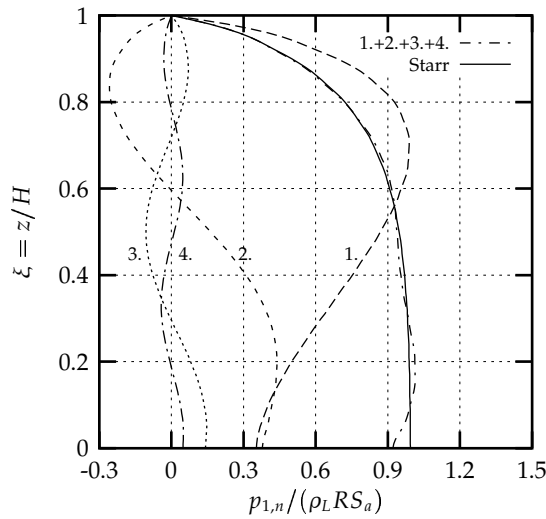


Abb. 2.20: Druckverteilungen und der Behälterwand, 1. Umfangsharmonische und $\alpha = 3.0$, $R/d = 1000$, $\nu = 0.3$.

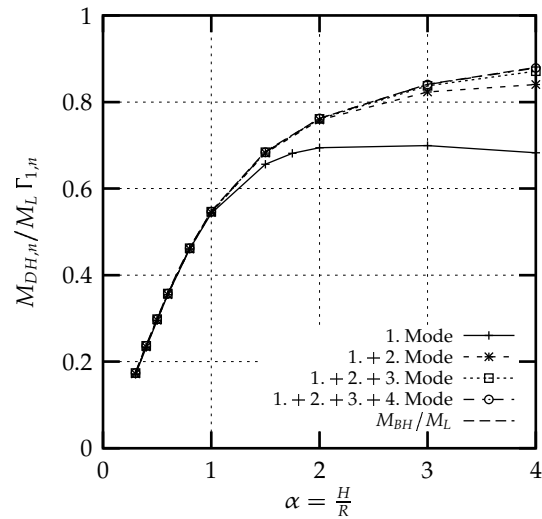


Abb. 2.21: Normierte Ersatzmassen, 1. Umfangsharmonische.

Die antisymmetrischen Druckverteilungen auf Behälterwand und -boden rufen Umsturmzmente hervor. Mit den Eigenformen können nach Glg. 2.75 und 2.76 normierte Umsturmzmente berechnet werden. Das Umsturmzment infolge der Starrkörperbewegung kann näherungsweise durch die Summe der Momente der ersten vier Eigenformen ersetzt werden. Die Berechnung des Gesamtmoments erfolgt dann nach Glg. 2.86.

$$MM_H(t) = \sum_{n=1}^4 MM_{DH,n} S_{a,x,n}^{abs}(t) \quad (2.86)$$

In den Abb. 2.22 und 2.23 sind die normierten Umsturmzmente für konstante Wandstärke $R/d = 1000$ infolge des Drucks auf die Behälterwand bzw. auf Behälterwand und -boden angegeben. Der Modeteilizipationsfaktor ist in den Werten enthalten.

Die Ersatzgrößen sind nur geringfügig von der Wandstärke abhängig. Es ist deshalb möglich, die hier angegebenen Ersatzgrößen für alle praktisch relevanten Wandstärken zu verwenden.

2.3.3 Berücksichtigung der Schalenmasse

Wie aus den vorangegangenen Abschnitten zu erkennen ist, erhält man bei Verwendung der Glg. 2.47 und somit der Vernachlässigung der Trägheitskräfte der Zylinderschale zu große Eigenwerte. Die Unterschiede sind besonders deutlich bei höheren Modes, größeren Wandstärken ($\eta < 500$) und gedrunenen Behältern ($\alpha < 0.8$).

Die Vernachlässigung der Trägheitskräfte der Schale hatte die Berechnung wesentlich vereinfacht. Wird die Schalenmasse berücksichtigt, so tritt zusätzlich eine Kopplung der Bewegung in axialer, radialer und Umfangsrichtung auf.

In einer ersten Näherung wird diese Kopplung vernachlässigt und nur die Trägheitskraft aus der Schalenmasse als zusätzliche Last in radialer (0. Harmonische) bzw. radialer und Umfangsrichtung (1. Harmonische) aufgebracht.

Für die 0. Umfangsharmonischen wird schließlich auch die Kopplung der Bewegungen der Schale in axialer und radialer Richtung untersucht.

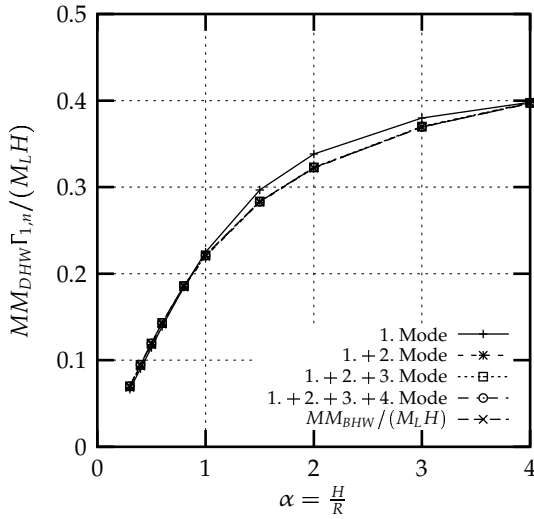


Abb. 2.22: Moment infolge Wanddruck, 1. Umfangsharmonische.

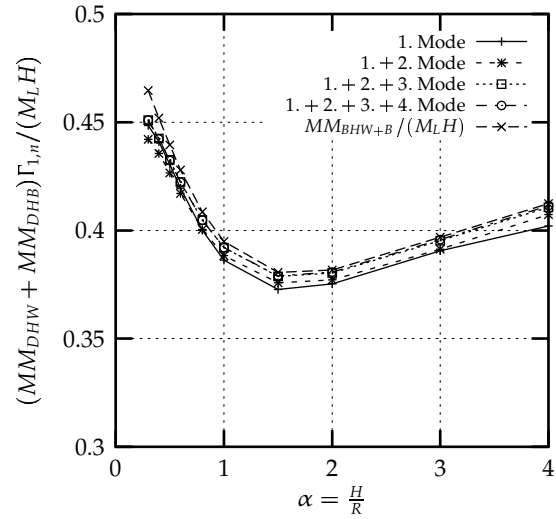


Abb. 2.23: Moment infolge Wand- und Boden- druck, 1. Umfangsharmonische.

Axialsymmetrische Eigenschwingung

Vernachlässigung der Kopplung von axialer und radialer Bewegung Die Belastung in radialer Richtung enthält jetzt nicht nur den Flüssigkeitsdruck p_L , sondern auch die Trägheitskräfte der Schale. Die gesamte auf die Schale wirkende Belastung p kann nach Glg. 2.87 bestimmt werden.

$$\begin{aligned} p_{0,n}(\xi, \varphi, t) &= \omega_{0,n}^2 e^{i\omega_{0,n}t} \left[2R\alpha\rho_L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_k \xi)}{\mu_k} \frac{I_0\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)}{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} d_{k,n} + \rho d\psi_{0,n}(\xi) \right] \\ p_{0,n}(\xi, \varphi, t) &= \omega_{0,n}^2 e^{i\omega_{0,n}t} [p_{L,0} + m_{S,0}] \psi_{0,n}(\xi) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Zur Bestimmung eines höherer Modes N ist wieder die Herauslösung der vorher zu bestimmen den Eigenformen $1..N - 1$ entsprechend Abschnitt 2.2.6 notwendig. Es ist zu beachten, daß dabei auch die Schalenmasse berücksichtigt wird. Dafür ist die Glg. 2.88 anzuwenden.

$$\psi_{0,N} = \psi_{0,N} - \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k} \frac{I_0\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)}{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} d_{k,N} d_{k,n} + \rho d c_{n,N} \right) \psi_{0,n} \quad (2.88)$$

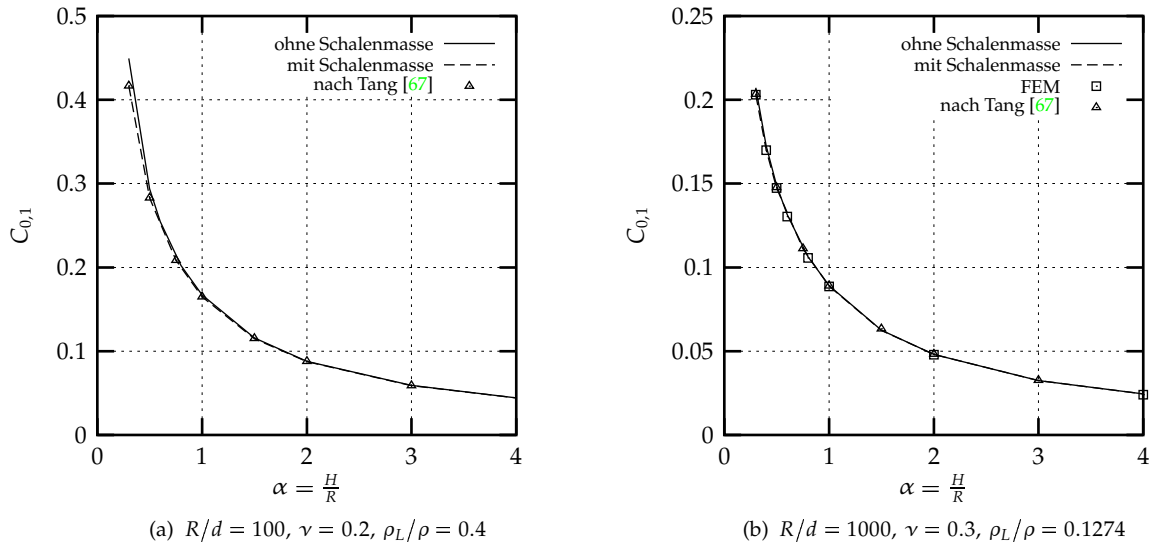
Mit Glg. 2.89 ist die Normierung der Funktion $\psi^{0,N}$ durchzuführen:

$$\psi_{0,N} = \frac{\psi_{0,N}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_L}{\rho} \frac{2}{\mu_k} \frac{I_0\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)}{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} d_{k,N}^2 + d c_{n,N}}} \quad (2.89)$$

Es sind die folgenden Hilfsgrößen zu beachten:

$$d_{k,N} = \int_0^1 \psi_{0,N} \cos(\mu_k \xi) d\xi \quad d_{k,n} = \int_0^1 \psi_{0,n} \cos(\mu_k \xi) d\xi \quad c_{n,N} = \int_0^1 \psi_{0,n} \psi_{0,N} d\xi$$

In der Abb. 2.24 sind die $C_{0,1}$ -Werte für die Ermittlung der Eigenfrequenz des 1. Biegemodes in der 0. Umfangsharmonischen dargestellt. Sie verdeutlichen, daß die Eigenfrequenzen nur bei gedungenen Behältern und großen Wandstärken durch die Trägheitskräfte der Schale reduziert werden.

Abb. 2.24: $C_{0,1}$ -Werte, 1. Biegemode und 0. Umfangsharmonische.

Berücksichtigung der Kopplung von axialer und radialer Bewegung Neben den radialen Verschiebungen treten auch axiale Verschiebungen der Schale auf. Diese rufen Trägheitskräfte in axialer Richtung hervor. Die axialen Trägheitskräfte bewirken wiederum eine radiale Verschiebung der Schale. Die Kopplung von axialen und radialen Schalenverschiebungen kommen in einer veränderten Form der Integralgleichung zum Ausdruck (Glg. 2.46). Gegenüber der Glg. 2.47 wird die Kernfunktion durch die Matrix \mathbf{G} gebildet. Die Trägheitskräfte ergeben sich aus der Matrix \mathbf{M} und den Eigenfunktionen $v_{0,n}$ multipliziert mit dem Quadrat der Kreisfrequenz $\omega_{0,n}$:

$$v_{0,n}(\xi) = \omega_{0,n}^2 H \int_0^1 \mathbf{G}_0(\xi, \bar{\xi}) \mathbf{M}_0 v_{0,n}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (2.90)$$

Die Matrizen $\mathbf{G}_0(\xi, \bar{\xi})$, \mathbf{M}_0 und $v_{0,n}$ haben folgenden Aufbau:

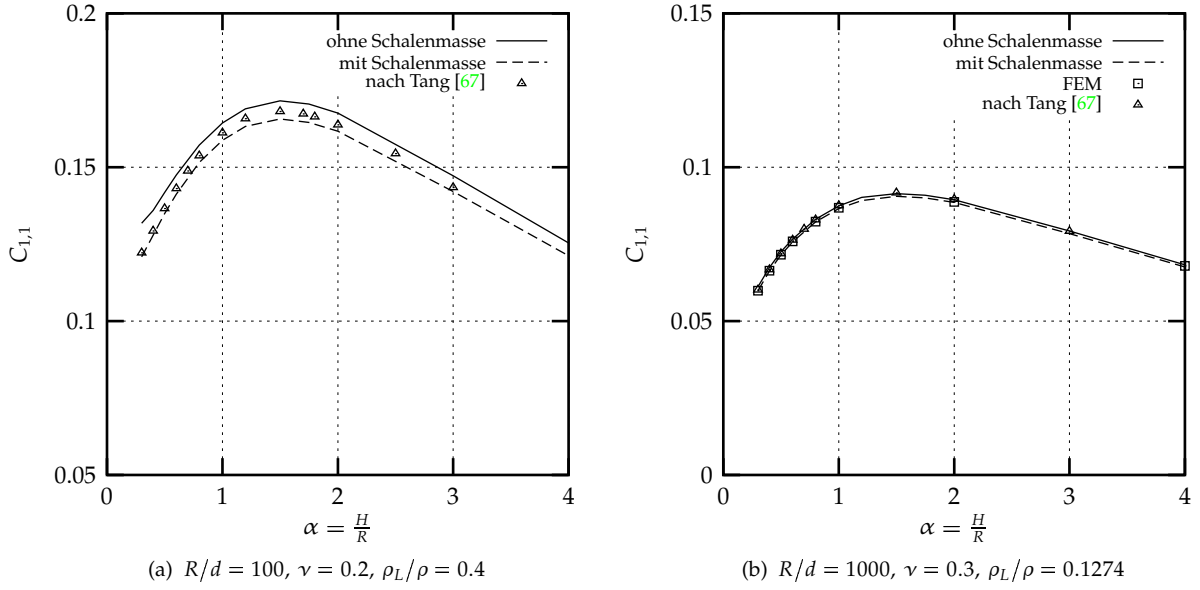
$$\mathbf{G}_0(\xi, \bar{\xi}) = \begin{bmatrix} g_{uu,0} & g_{uw,0} \\ g_{wu,0} & g_{ww,0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{S,0} & 0 \\ 0 & p_L + m_{S,0} \end{bmatrix} \quad v_{0,n} = \begin{pmatrix} v_{0,n} \\ \psi_{0,n} \end{pmatrix}$$

Darin werden mit $v_{0,n}$ und $\psi_{0,n}$ die n-te Biegeeigenformen der Schale in axialer bzw. radialer Richtung für die 0. Umfangsharmonische bezeichnet. Die Einflußfunktionen in \mathbf{G}_0 sind nach Anhang B zu ermitteln.

Eine durchgeführte Parameteruntersuchung hat gezeigt, daß die Kopplung von axialer und radialer Bewegung der Schale nur sehr kleine Verringerungen der Eigenwerte liefert und vernachlässigt werden kann.

Antimetrische Eigenschwingung

Die Kopplung der Bewegungen in axialer, radialer und Umfangsrichtung werden nicht berücksichtigt.

Abb. 2.25: $C_{1,1}$ -Werte, 1. Biegemode und 1. Umfangsharmonische.

Die Belastung der Schale setzt sich aus dem Flüssigkeitsdruck und den Trägheitskräften der Schale zusammen. Der auf die Schale wirkende Flüssigkeitsdruck p_L ist $\cos \varphi$ -verteilt (Glg. 2.91). Die Trägheitskräfte der Schale in horizontaler Richtung können in $\cos \varphi$ -verteilten Radialkräften und $\sin \varphi$ -verteilten Ringkräften zerlegt werden (Glg. 2.92).

$$p_{L,1,n}(\xi, \varphi, t) = \omega_{1,n}^2 e^{i\omega_{1,n}t} 2R\alpha\rho_L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n \xi)}{\mu_n} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} d_{k,n} \cos \varphi \quad (2.91)$$

$$p_{S,w,n}(\xi, \varphi, t) = \omega_{1,n}^2 e^{i\omega_{1,n}t} \rho d \psi_{1,n}(\xi) \cos \varphi \quad p_{S,v,n}(\xi, \varphi, t) = \omega_{1,n}^2 e^{i\omega_{1,n}t} \rho d \psi_{1,n}(\xi) \sin \varphi \quad (2.92)$$

Die Orthogonalisierung der Eigenfunktion $\psi_{1,N}$ in bezug auf die niedrigeren Eigenfunktionen erfolgt analog zur freien Schwingung in der 0. Umfangsharmonischen. Dazu ist die Glg. 2.93 anzuwenden. Mit Glg. 2.94 ist die Normierung der Eigenfunktion durchzuführen.

$$\psi_{1,N} = \psi_{1,N} - \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k} \frac{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} d_{k,N} d_{k,n} + \rho d c_{n,N} \right) \psi_{1,n} \quad (2.93)$$

$$\psi_{1,N} = \frac{\psi_{1,N}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_L}{\rho} \frac{2}{\mu_k} \frac{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} d_{k,N}^2 + d c_{n,N}}} \quad (2.94)$$

Als Hilfsgrößen treten auf:

$$d_{k,N} = \int_0^1 \psi_{1,N} \cos(\mu_k \xi) d\xi \quad d_{k,n} = \int_0^1 \psi_{1,n} \cos(\mu_k \xi) d\xi \quad c_{n,N} = \int_0^1 \psi_{1,n} \psi_{1,N} d\xi$$

Die in Abb. 2.25 dargestellten $C_{1,1}$ -Werte verdeutlichen den Einfluß der Trägheitskräfte der Schalenwand.

2.4 Interaktion von Behälter und kompressibler reibungsfreier Flüssigkeit

Von Fischer wird in [15] untersucht, welche Auswirkungen die Kompressibilität der Flüssigkeit auf das Antwortverhalten von Behältern besitzt. Dafür entwickelte er eine Lösung für die Schwingungsgleichung der kompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit. Bei der Bestimmung der Antwortgrößen (Ersatzmassen) verwendete er nur sehr grobe Näherungen für Eigenfrequenzen der Behälterschale.

Im folgenden werden auf der Basis der Integralgleichungsmethode die Antwortgrößen unter Verwendung der "exakten" Eigenfrequenzen bestimmt. Dazu wird der Lösungsansatz von Fischer [15] für die Gleichung der kompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit verwendet. Für den Behälter treten bezüglich der Modellbildung und der Lösung der zugehörigen Gleichungen keine Änderungen auf.

2.4.1 Gleichung der kompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit

Die Flüssigkeit wird als kompressibel und reibungsfrei angenommen. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß keine Wirbel in der Flüssigkeit auftreten. Die Kontinuitätsgleichung der reibungsfreien kompressiblen Flüssigkeit lautet (Sommerfeld [65]):

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_{L,0} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.95)$$

Für die Eulerschen Gleichungen unter Berücksichtigung der Beziehung zwischen Druck und Dichte $\nabla p = \left(\frac{dp}{d\rho_L} \right)_0 \nabla \rho_L$ ergibt sich folgender Ausdruck (Sommerfeld [65]):

$$\rho_{L,0} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c_L^2 \nabla \rho_L = 0 \quad (2.96)$$

In den Glg. 2.95 und 2.96 wurde unter Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung ρ_L durch die ungestörte Dichte $\rho_{L,0}$ ersetzt. Weiterhin wurde angenommen, daß nur sehr kleine Schwingungsamplituden der Flüssigkeitsteilchen auftreten. Dadurch können die Beschleunigungsterme vernachlässigt werden, die sich aus der Bewegung des Teilchens innerhalb des Geschwindigkeitsfeldes ergeben. Die totale Geschwindigkeit $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ist somit gleich der lokalen Geschwindigkeit $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$. Das führt zu einer linearen Form der Gleichungen. Mit c_L wird die Schallgeschwindigkeit der Flüssigkeit bezeichnet.

Für die Flüssigkeitgeschwindigkeit kann analog zu Abschnitt 2.2.1 ein skalares Geschwindigkeitspotential Φ eingeführt werden. Damit gehen die Gleichungen 2.95 und 2.96 über in 2.95a und 2.96a:

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_{L,0} \Delta \Phi = 0 \quad (2.95a)$$

$$\rho_{L,0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_L^2 \rho_L = 0 \quad (2.96a)$$

Bei Differentiation der zweiten Glg. 2.96a nach t und Vergleich mit der ersten Glg. 2.95a ergibt sich die Wellengleichung (Glg. 2.97) für die kompressible reibungsfreie Flüssigkeit. Sie ist eine lineare, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typ:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.97)$$

Zusätzlich zu Gleichung 2.97 sind die Randbedingungen der Flüssigkeit nach Abschnitt 2.2.1 zu erfüllen.

2.4.2 Lösung für die Gleichung der Flüssigkeit

Bei Verwendung der dimensionslosen Variablen $\xi = \frac{z}{H}$ und $\zeta = \frac{r}{R}$ erhält man die Glg. 2.97 in der folgenden Form:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.98)$$

Für das Geschwindigkeitspotential wird ein Produktansatz getroffen:

$$\Phi(\zeta, \varphi, \xi, t) = P(\zeta)Q(\varphi)S(\xi)T(t)$$

Weiterhin wird eine harmonische Zeitfunktion $T(t) = e^{i\omega_{m,1}t}$ ($\omega_{m,1} = 1$. Eigenfrequenz in der m -ten Umfangsharmonischen) sowie ein Fourier-Reihen-Ansatz für die Funktion in Umfangsrichtung verwendet: $Q_m(\varphi) = \cos(m\varphi)$. Die Wellengleichung 2.97 lässt sich damit in ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen umformen:

$$\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\xi^2} = -\lambda^2 \quad (2.99)$$

$$\zeta^2 \frac{d^2 P}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dP}{d\zeta} - \left[\left(\lambda^2 - \frac{\omega^2 R^2}{c_L^2} \right) \zeta^2 + m^2 \right] P = 0 \quad (2.100)$$

Für den impulsiven Druckanteil sind die homogenen Randbedingungen bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ entsprechend Abschnitts 2.2.2 zu erfüllen. Daraus ergibt sich als Lösung für die Funktion in axialer Richtung: $S(\xi) = \cos(\mu_n \xi)$ mit $\mu_n = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$.

Lösungen von Glg. 2.100 sind die modifizierten Bessel-Funktionen: $P(\zeta) = c_1 I_m(\mu_n \zeta) + c_2 K_m(\mu_n \zeta)$. Aufgrund der Singularität der modifizierten Bessel-Funktion zweiter Art bei $\zeta = 0$ ist $c_2 = 0$.

Zur Lösung der Schwingungsgleichung (Glg. 2.98) kann unter Berücksichtigung der homogenen Randbedingungen der folgende Ansatz angegeben werden:

$$\Phi(\xi, \zeta, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{m,n}(t) \cos(\mu_n \xi) I_m\left(\frac{\bar{\mu}_n}{\alpha} \zeta\right) \cos(m\varphi) e^{i\omega_{m,1}t} \quad (2.101)$$

mit:

$$\bar{\mu}_n^2 = \mu_n^2 - \frac{\omega_{m,1}^2 R^2}{c_L^2} \alpha^2 \quad (2.102)$$

Fischer [15] verwendet für den Quotienten $\frac{\omega_{m,1}^2 R^2}{c_L^2}$ näherungsweise einen Wert von 0.25, unabhängig von den konkreten Behälterparametern.

Bei Einführung des Parameters $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ für das Schalenmaterial und der Verwendung der Frequenzfaktoren ($C_{m,1}$ -Werte nach Abschnitt 2.3) kann für Glg. 2.102 geschrieben werden:

$$\bar{\mu}_n^2 = \mu_n^2 - \frac{c^2}{c_L^2} C_{m,1}^2 \quad (2.103)$$

Damit ist eine Berücksichtigung der "exakten" Eigenfrequenz bei der Ermittlung der Antwortgrößen möglich.

Flüssigkeit	inkompressibel	Öl: SAE 30	Aceton
Schallgeschwindigkeit c_L	∞	1200 m/s	1000 m/s
Stahlbehälter $\frac{c}{c_L}$	0	4.31	5.17
Stahlbetonbehälter $\frac{c}{c_L}$	0	3.23	2.69

Tab. 2.2: Verwendete Schallgeschwindigkeiten und zugeordnete Flüssigkeiten

Die zeitabhängige Funktion $F_{m,n}(t)$ in Glg. 2.101 wird aus der inhomogenen Randbedingung an der Behälterwand bestimmt. Dazu wird die Randbedingung in Ringrichtung und in axialer Richtung in eine Fourier-Reihe entwickelt.

Für das Geschwindigkeitspotential $\Phi_{m,1}$ ergibt sich damit die nachfolgende Lösung in Abhängigkeit von der radialen Wandeigenform $\psi_{m,1}(\xi)$ und der Eigenfrequenz $\omega_{m,1}$ in der m-ten Umfangsharmonischen.

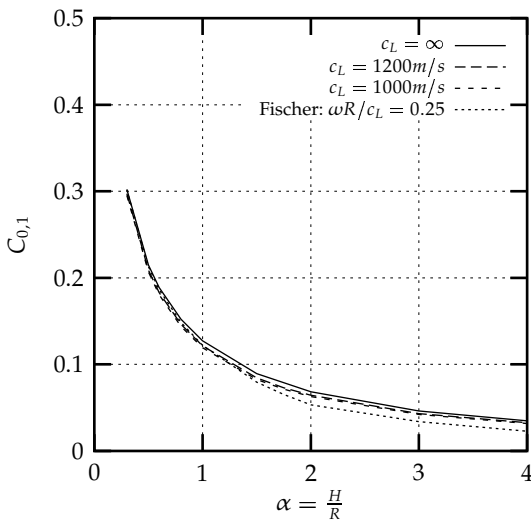
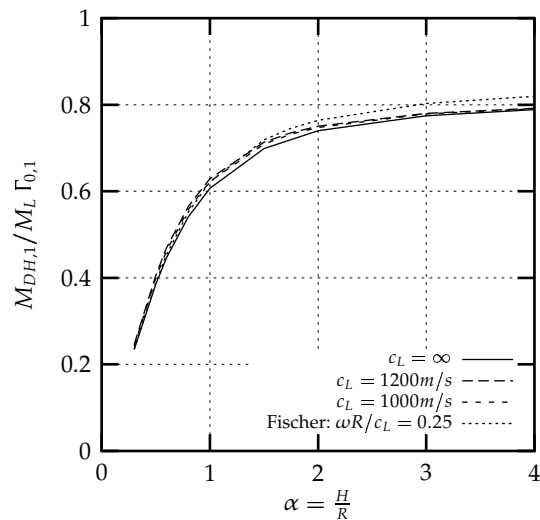
$$\Phi_{m,1}(\xi, \zeta, \varphi, t) = 2R\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_m\left(\frac{\bar{\mu}_n}{\alpha}\zeta\right)}{\bar{\mu}_n I'_m\left(\frac{\bar{\mu}_n}{\alpha}\right)} d_{m,n} \cos(\mu_n \xi) \cos(m\varphi) \omega_{m,1} e^{i\omega_{m,1}t} \quad (2.104)$$

mit:

$$d_{m,n} = \int_0^1 \psi_{m,1}(\xi) \cos(\mu_n \xi) d\xi$$

Die Druckverteilung auf Behälterwand und -boden ergibt sich aus dem Potential $\Phi_{m,1}$ nach der Glg. 2.105.

$$p_{m,1}(\xi, \zeta, \varphi, t) = 2R\alpha\rho_L\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_m\left(\frac{\bar{\mu}_n}{\alpha}\zeta\right)}{\bar{\mu}_n I'_m\left(\frac{\bar{\mu}_n}{\alpha}\right)} d_n \cos(\mu_n \xi) \cos(m\varphi) e^{i\omega t} \quad (2.105)$$

(a) Frequenzfaktoren $C_{0,1}$ (b) Ersatzmasse $\frac{M_{DH,1}}{M_L} \Gamma_{0,1}$ Abb. 2.26: 1. Biegemode, 0. Umfangsharmonische, $R/d = 500$, $\nu = 0.3$.

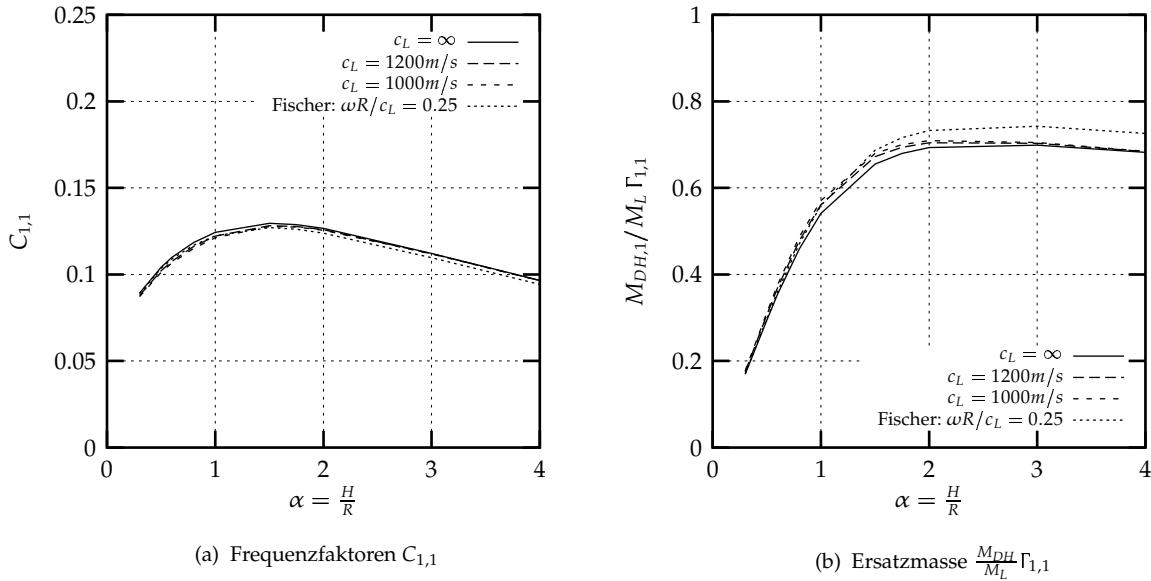


Abb. 2.27: 1. Biegemode, 1. Umfangsharmonische, $R/d = 500$, $\nu = 0.3$.

2.4.3 Berechnungsergebnisse

Unter Verwendung der Glg. 2.105 wurde der impulsive Druck infolge der Interaktion von Schale und Flüssigkeit im ersten Biegemode mit der Integralgleichungsmethode bestimmt. Dabei wurden die in Tab. 2.2 angegebenen Werte für die Schallgeschwindigkeit c_L der Flüssigkeit verwendet. Für die Schale wurden als Materialkennwerte für Stahl $c = 5170 \text{ m/s}$, $\nu = 0.3$ und für Stahlbeton $c = 3225 \text{ m/s}$, $\nu = 0.2$ gewählt.

In der Abb. 2.26 sind die Frequenzfaktoren $C_{0,1}$ und die Ersatzmassen für die 0. Umfangsharmonische und den ersten Biegemode dargestellt. Die Abb. 2.27 enthält die entsprechenden Werte für die 1. Umfangsharmonische.

Aus den Abb. 2.26 und 2.27 ist zu entnehmen, daß entgegen den Angaben von Fischer [15] die Flüssigkeitskompressibilität einen sehr geringen Einfluß auf das Antwortverhalten besitzt und bei der Interaktionschwingung von Schale und Flüssigkeit vernachlässigt werden kann. Die Näherung von Fischer für die Eigenfrequenz der Interaktionsschwingung von Behälter und Flüssigkeit führt zu einer Überschätzung des Einflusses der Flüssigkeitskompressibilität.

2.5 Interaktion von Behälter und inkompressibler reibungshafter Flüssigkeit

Bisher wird zur Berechnung der Interaktion von Behälter und Flüssigkeit von der Potentialströmung einer reibungsfreien Flüssigkeit ausgegangen. In jeder Flüssigkeit ist jedoch eine innere Reibung vorhanden, die eine dämpfende Wirkung auf die gemeinsame Schwingung von Schale und Flüssigkeit besitzt. Die Dämpfung führt zu einer Verringerung der Antwortgrößen.

Bei der Schwappschwingung wird die Flüssigkeitsreibung durch eine nachträglich eingeführte viskose Dämpfung in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt. Für die Festlegung des entsprechenden Dämpfungsmaßes sind keine wissenschaftlich begründeten Angaben vorhanden. In der Literatur werden Werte von 0% bis 0.5% für das Dämpfungsmaß angegeben. Bei den im-

pulsiven Druckanteilen wird die Flüssigkeitsreibung vernachlässigt.

Nachfolgend wird eine Möglichkeit zur Festlegung der Dämpfungsmaße anhand einfacher physikalischer Überlegungen entwickelt.

2.5.1 Gleichung der inkompressiblen reibungsbehafteten Flüssigkeit

Die Flüssigkeit wird als inkompressibel und reibungsbehaftet angesehen. Es wird ausschließlich eine Newtonschen Flüssigkeitsreibung (Viskosität ν_L) betrachtet. Die Kontinuitäts- bzw. Inkompressibilitätsgleichung lautet (s.a. Sommerfeld [65]):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.106)$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen ohne Berücksichtigung von Volumenkräften lauten (Sommerfeld [65]):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nu_L \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_L} \nabla p \quad (2.107)$$

Analog zu den Annahmen der idealen Flüssigkeit wird auch jetzt vorausgesetzt, daß infolge der kleinen Schwingungsamplituden die Beschleunigungsanteile aus der Bewegung der Flüssigkeitsteilchen im Geschwindigkeitsfeld vernachlässigt werden können. Damit entfallen die nicht-linearen Ausdrücke $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ in Glg. 2.107.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu_L \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_L} \nabla p \quad (2.108)$$

Die Navier-Stokes-Gleichung läßt sich durch Bildung der Rotation und Einführung der Wirbel-dichte $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ in die Wirbeltransportgleichung umformen (s.a. Landau und Lifschitz [37]).

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu_L \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (2.109)$$

Die Rotation der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ genügt damit einer Gleichung vom Typ der Wärmeleitungsgleichung. Das bedeutet, daß ein konvektiver Transport der Wirbel vom Ort ihrer Entstehung in das Innere der Flüssigkeit stattfindet. Dieser Prozeß klingt in die Flüssigkeit hinein exponentiell ab.

Unter der Wirkung von konservativen Kräften können auch innerhalb einer reibungsbehafteten Flüssigkeit keine Wirbel entstehen. Es müssen Kräfte vorhanden sein, die nicht aus einem Potential ableitbar sind (Schäfer [52]). Im betrachteten Fall sind dies die Schubspannungen (Reibungsdrücke), die an der Behälterwand auftreten.

Bei der Interaktion von Schale und Flüssigkeit entstehen damit Wirbel an der Behälterwand, die exponentiell in das Flüssigkeitsinnere abklingen. Auf Grund der exponentiellen Dämpfung findet die wirbelbehaftete Strömung praktisch nur in einer sehr dünnen Schicht an der Wand statt. Der größte Teil der Flüssigkeit führt eine rotationsfreie Strömung aus und wird durch die Glg. 2.110 beschrieben:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.110)$$

Daraus folgt, daß auch $\Delta \mathbf{v} = 0$ ist, und die Navier-Stokes-Gleichung geht in die Potentialgleichung über. Die Flüssigkeit verhält sich also überall, außer in einer dünnen Schicht an der Wand, wie eine ideale (reibungsfreie inkompressible) Flüssigkeit.

Mit den Gleichungen der idealen Flüssigkeit können nur die Randbedingungen erfüllt werden, die eine Übereinstimmung der Normalenkomponenten von Strömungsgeschwindigkeit und Wandgeschwindigkeit fordern. Innerhalb der dünnen wirbelbehafteten Schicht an der Wand werden sich deshalb für den tatsächlichen Verlauf der Normalenkomponente kaum Änderungen ergeben.

Die Randbedingungen der Tangentialkomponente können mit Glg. 2.110 nicht erfüllt werden. Die Lösung der Potentialgleichung liefert tangentiale Strömungsgeschwindigkeiten, die von der entsprechenden Geschwindigkeit der Wand verschieden sind. Innerhalb der dünnen Grenzschicht muß es demnach zu einer deutlichen Änderung der tangentialen Strömungskomponente kommen.

Um die Vorgänge in der Grenzschicht zu untersuchen, wird zunächst der einfache Fall einer Scherströmung in der Flüssigkeit über einer in ihrer Ebene schwingenden Fläche betrachtet (s.a. Landau und Lifschitz [37]).

2.5.2 Lösung für die eindimensionale Scherströmung

Eine inkompressible viskose Flüssigkeit befindet sich auf einer in der yz -Ebene liegenden Fläche ($x > 0$). Die Fläche führt harmonische Schwingungen mit der Frequenz Ω in ihrer Ebene in y -Richtung aus. Die Geschwindigkeit der Fläche kann mit der Gleichung $v = v_0 e^{i\Omega t}$ angegeben werden (Abb. 2.28).

Wegen der vorliegenden Symmetrie sind alle Größen nur von der Zeit t und der Koordinate x abhängig. Die Inkompressibilitätsgleichung (Glg. 2.106) lautet daher:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (2.111)$$

Daraus folgt $v_x = \text{const}$ und bei Beachtung der Randbedingung an der Fläche $v_x = 0$ bei $x = 0$, $v_x = 0$ für alle x . Da alle Strömungsgeschwindigkeiten nur von x und t abhängig sind, ist $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{v}$ und wegen $v_x = 0$ ergibt sich $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = 0$. Die Glg. 2.107 nimmt damit die folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_L} \nabla p + \nu_L \Delta \mathbf{v} \quad (2.112)$$

Die x -Komponente von Glg. 2.112 lautet:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.113)$$

und damit ist $p = \text{const}$. Aus den Symmetriebedingungen folgt, daß $v_z = 0$ ist. Die y -Komponente von Glg. 2.112 lautet:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \nu_L \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \quad (2.114)$$

Diese Gleichung ist vom Typ der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung. Sie kann mit Hilfe eines Separationsansatzes $v_y(x, t) = f(x) e^{i\Omega t}$ gelöst werden. Die Glg. 2.114 lautet damit:

$$i \frac{\Omega}{\nu_L} f - \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad (2.115)$$

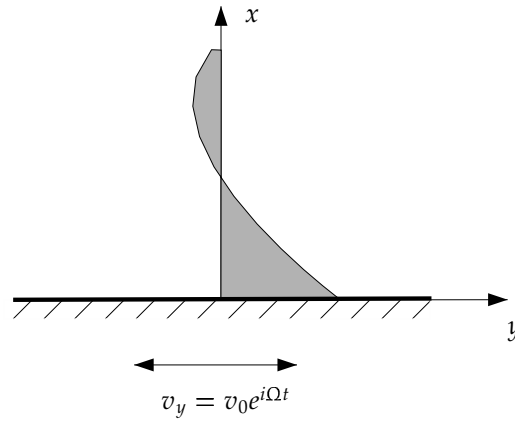


Abb. 2.28: Scherströmung über einer in ihrer Ebene schwingenden Fläche

Die allgemeine Lösung von Glg. 2.115 ist:

$$f(x) = C_1 e^{ik_1 x} + C_2 e^{ik_2 x} \quad (2.116)$$

mit

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu_L}} (1 - i) \quad (2.117)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 werden aus den Randbedingungen bestimmt. Für $x \rightarrow \infty$ muß die Geschwindigkeit endlich bleiben: $C_1 = 0$. Die Konstante C_2 wird aus der Bedingung bestimmt, daß die Geschwindigkeiten der Fläche und der Flüssigkeit bei $x = 0$ übereinstimmen müssen:

$$C_2 = v_0 \quad (2.118)$$

Somit ist die Lösung für die Geschwindigkeit in y -Richtung:

$$v_y = v_0 e^{-\frac{x}{\delta_L}} e^{i(\Omega t - \frac{x}{\delta_L})} = v_0 e^{i\Omega t} e^{-(1+i)\frac{x}{\delta_L}} \quad (2.119)$$

Dabei handelt es sich um eine fortschreitende harmonische Welle, deren Amplitude exponentiell mit der Entfernung abnimmt. Es liegt somit eine räumlich gedämpfte, transversale Welle vor (v_y steht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung). Die Dämpfungskonstante ergibt sich aus dem Imaginärteil der komplexen Wellenzahl k_2 . Dagegen entspricht der Realteil von k_2 der Wellenzahl und ist umgekehrt proportional zur Wellenlänge ($\lambda = \frac{2\pi}{\Re(k_2)}$). Die Eindringtiefe $\delta_L = \sqrt{\frac{2\nu_L}{\Omega}}$ gibt an, wie die gedämpften Schwingungen in das Flüssigkeitsinnere abklingen. Auf einem Abstand von $x = \delta_L$ nimmt die Amplitude um den Faktor e und auf einer Wellenlänge ($2\pi\delta_L$) um den Faktor $e^{2\pi} \approx 535$ ab. Die Dämpfung nimmt für größer werdende Frequenzen zu und verringert sich mit wachsender Zähigkeit. Dagegen sinkt die Eindringtiefe mit wachsender Frequenz und steigt mit größer werdender Zähigkeit.

2.5.3 Tangentiale Strömungsgeschwindigkeit an den Flüssigkeitsrändern

Für die betrachteten Flüssigkeitsbehälter sind die Behälterabmessungen groß gegenüber der Eindringtiefe δ_L . Weiterhin wird vorausgesetzt, daß die Schwingungsamplituden (hier mit q bezeichnet) klein gegenüber den Behälterabmessungen (Radius R , Höhe H) sind.

$$R \gg \delta_L \quad \text{und} \quad q \ll R$$

Für die Reynoldszahl bestehen keine Einschränkungen. Die Vernachlässigung des Gliedes $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ in der Navier-Stokesschen-Gleichung 2.107 ergibt sich aus den nachfolgenden Überlegungen.

Der Operator $(\mathbf{v} \nabla)$ stellt die Ableitung in Richtung der Flüssigkeitgeschwindigkeiten dar. An den Flüssigkeitsrändern treten die größten Geschwindigkeiten parallel zur Oberfläche auf. In dieser Richtung erfährt die Geschwindigkeit über Strecken der Größenordnung der Abmessung des Behälters merkbare Änderungen. Es ist demnach $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \sim \frac{v^2}{R} \sim \frac{q^2 \Omega^2}{R}$. Die Geschwindigkeit ist von der Größenordnung $v \sim q \Omega$. Die partielle Ableitung der Geschwindigkeit $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ ist von der Größenordnung $v \Omega \sim q \Omega^2$. Der Vergleich der beiden Ausdrücke zeigt, daß für $q \ll R$ tatsächlich $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ gilt. Die Terme $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ und $\nu_L \Delta \mathbf{v}$ sind dagegen von der gleichen Größenordnung.

Zur Bestimmung des Verlaufs der tangentialen Geschwindigkeiten wird ein kleines Teilstück der Oberfläche betrachtet, dessen Abmessungen groß gegenüber der Eindringtiefe δ_L und klein gegenüber den Abmessungen des Behälters sind. Dieses Teilstück kann angenähert als ebene Fläche angesehen werden (Abb. 2.29). Damit gelten für dieses Teilstück die Ergebnisse des vorigen Abschnitts 2.6.2.

Mit v_y wird die Tangentialgeschwindigkeit relativ zur Oberfläche des Teilstücks bezeichnet. Direkt auf den Teiloberflächen ($x = 0$) muß die relative Tangentialgeschwindigkeit null werden (Haftbedingung für die viskose Flüssigkeit). Die x -Achse zeigt in Richtung der Flächennormalen. Aus der Lösung der Potentialgleichung erhält man eine relative Tangentialgeschwindigkeit von $v_0 e^{i\Omega t}$ bei $x = 0$. Daraus ergibt sich der Verlauf der Tangentialgeschwindigkeit zu:

$$v_y = v_0 e^{i\Omega t} \left[1 - e^{-(1+i)\frac{x}{\delta_L}} \right]$$

2.5.4 Dämpfung der Schwingungen des Behälter-Flüssigkeit-Systems

Die Dämpfung der Schwingung von Flüssigkeit und Behälter ist gering. Es ist deshalb ausreichend, einen modalen Dämpfungswert aus den Eigenformen der ungedämpften Schwingung zu bestimmen.

Es wird angenommen, daß die mechanische Energie des Systems Behälter-Flüssigkeit mit der Zeit nach dem Gesetz $E_{mech} = \text{const } e^{-2\gamma t}$ abnimmt. Der Dämpfungsfaktor γ ergibt sich aus der nachfolgenden Glg. 2.120 mit dem zeitlichen Mittelwert der Energiedissipation $\bar{\dot{E}}_{mech}$.

$$\gamma = \frac{|\bar{\dot{E}}_{mech}|}{2E_{mech}} \quad (2.120)$$

Die Energie ist dem Quadrat der Schwingungsamplituden proportional. Die zeitliche Abnahme der Schwingungsamplituden wird demnach durch den Faktor $e^{-\gamma t}$ bestimmt. Die Beziehung zwischen dem Dämpfungsfaktor und dem Lehrschen Dämpfungsmaß lautet: $\kappa = \frac{\gamma}{\omega}$. Die mittlere je Zeiteinheit dissipierte mechanische Energie wird durch die Glg. 2.121 gegeben.

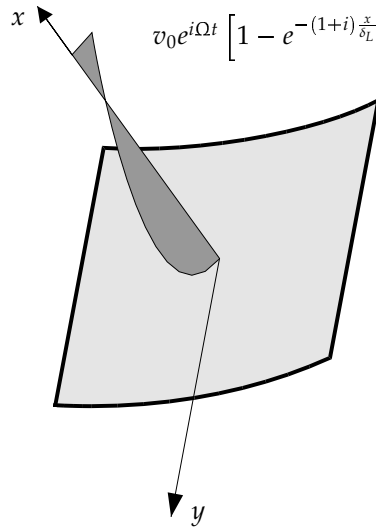


Abb. 2.29: Verlauf der relativen tangentialen Strömungsgeschwindigkeit an der Behälterwand bzw. -boden.

$$\bar{E}_{mech} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_L \rho_L \Omega}{2}} \int_A |v_0|^2 dA \quad (2.121)$$

Bei Schwingungen mit kleiner Amplitude sind mittlere kinetische und mittlere potentielle Energie gleich. Die mechanische Energie ist deshalb gleich der doppelten mittleren kinetischen (bzw. potentiellen) Energie ($E_{mech} = 2\bar{E}_{kin}$). Für die kinetische Energie der Flüssigkeit gilt:

$$E_{kin} = \frac{\rho_L}{2} \int_V v^2 dV \quad (2.122)$$

Das Volumenintegral kann mit dem Flüssigkeitspotential Φ in ein Oberflächenintegral umgeformt werden:

$$E_{kin} = -\frac{\rho_L}{2} \int_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA \quad (2.123)$$

Der Ausdruck $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ stellt die Geschwindigkeit normal zur Oberfläche (positiv nach innen) und der Ausdruck $\rho_L \Phi$ den impulsiven Druck auf die Oberfläche dar.

2.5.5 Dämpfung der Schwappschwingung

Das Flüssigkeitspotential der Schwappschwingung für den n-ten Mode lautet:

$$\Phi_n = q e^{i\Omega t} \frac{J_1(\lambda_n \zeta)}{J_1(\lambda_n)} \frac{\cosh(\lambda_n \alpha \xi)}{\cosh(\lambda_n \alpha)} R \cos \varphi \quad (2.124)$$

Infolge der vorausgesetzten starren Wände treten nur an der freien Flüssigkeitsoberfläche von null verschiedene Normalen-Geschwindigkeiten auf. Die kinetische Energie wird aus der nachfolgenden Glg. 2.125 bestimmt:

$$E_{kin} = \frac{\rho_L}{2} R^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \zeta d\zeta d\varphi \quad (2.125)$$

Für die mechanische Energie der Schwappschwingung im n-ten Mode ergibt sich damit:

$$E_{mech} = q^2 \rho_L R^3 \frac{\pi}{4} \tanh(\lambda_n \alpha) \frac{\lambda_n^2 - 1}{\lambda_n^2} \quad (2.126)$$

Der Hauptanteil der Energiedissipation entsteht aus der Reibung an den Behälterwänden und an dem Behälterboden. Die Reibung infolge der Wirbelbildung an der freien Oberfläche ist weitaus geringer und wird vernachlässigt. Die dissipierte Energie setzt sich somit aus den Anteilen der Reibung an der Behälterwand infolge der Strömung in axialer und Umfangsrichtung sowie der Reibung am Behälterboden infolge der Strömung in radialer und Umfangsrichtung zusammen.

Für die Geschwindigkeit in axialer Richtung an der Behälterwand gilt:

$$v_\xi = \frac{1}{H} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=1} = q e^{i\Omega t} \frac{\sinh(\lambda_n \alpha \xi)}{\cosh(\lambda_n \alpha)} \lambda_n \cos \varphi \quad (2.127)$$

Für die Geschwindigkeit in Umfangsrichtung an der Behälterwand gilt:

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \varphi} \Big|_{\zeta=1} = -q e^{i\Omega t} \frac{\cosh(\lambda_n \alpha \xi)}{\cosh(\lambda_n \alpha)} \sin \varphi \quad (2.128)$$

Für die Geschwindigkeit in Umfangsrichtung am Behälterboden gilt:

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \varphi} \Big|_{\xi=0} = -q e^{i\Omega t} \frac{J_1(\lambda_n \zeta)}{J_1(\lambda_n)} \frac{1}{\zeta \cosh(\lambda_n \alpha)} \sin \varphi \quad (2.129)$$

Für die Geschwindigkeit in radialer Richtung am Behälterboden gilt:

$$v_\zeta = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \zeta} \Big|_{\xi=0} = q e^{i\Omega t} \frac{\lambda_n}{J_1(\lambda_n)} \frac{1}{\cosh(\lambda_n \alpha)} \left[J_0(\lambda_n \zeta) - \frac{1}{\lambda_n \zeta} J_1(\lambda_n \zeta) \right] \cos \varphi \quad (2.130)$$

Die Integrale der Strömungsgeschwindigkeit $I_i = \frac{1}{R^2 q^2} \int_{A_i} |v_0|^2 dA_i$ über die Teilflächen Wand und Boden lauten:

Axiale Strömung an der Behälterwand:

$$\begin{aligned} I_{Wand,1} &= \frac{\alpha}{q^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |v_\xi|^2 d\xi d\varphi \\ &= \alpha \pi \left[\frac{\lambda_n}{2\alpha} \tanh(\lambda_n \alpha) - \frac{\lambda_n^2}{2 \cosh(\lambda_n \alpha)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.131)$$

Radiale Strömung am Behälterboden:

$$\begin{aligned}
 I_{Boden,1} &= \frac{1}{q^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |v_\zeta|^2 \zeta d\zeta d\varphi \\
 &= \frac{\lambda_n^2}{J_1(\lambda_n)^2} \frac{\pi}{\cosh(\lambda_n \alpha)^2} \left[J_0(\lambda_n)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{1}{2\lambda_n^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_1(\lambda_n)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda_n^2} \right) + J_0(0)^2 \left(\frac{1}{2\lambda_n^2} - \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.132}$$

Strömung in Umfangsrichtung an der Behälterwand:

$$\begin{aligned}
 I_{Wand,2} &= \frac{\alpha}{q^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |v_\varphi|^2 d\xi d\varphi \\
 &= \alpha \pi \left[\frac{1}{2\lambda_n \alpha} \tanh(\lambda_n \alpha) + \frac{1}{2 \cosh(\lambda_n \alpha)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{2.133}$$

Strömung in Umfangsrichtung am Behälterboden:

$$\begin{aligned}
 I_{Boden,2} &= \frac{1}{q^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |v_\varphi|^2 \zeta d\zeta d\varphi \\
 &= \frac{\pi}{2J_1(\lambda_n)^2 \cosh(\lambda_n \alpha)^2} [J_0(0)^2 - J_0(\lambda_n)^2 - J_1(\lambda_n)^2]
 \end{aligned} \tag{2.134}$$

Die mittlere je Zeiteinheit dissipierte Energie folgt aus Glg. 2.121 unter Berücksichtigung der Integrale 2.131 bis 2.134.

$$\bar{E}_{mech} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_L \rho_L \Omega}{2}} R^2 q^2 [I_{Wand,1} + I_{Wand,2} + I_{Boden,1} + I_{Boden,2}] \tag{2.135}$$

Für den Dämpfungsfaktor ergibt sich nach Glg. 2.120:

$$\gamma = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{\nu_L \Omega}{2}} \frac{I_{Wand,1} + I_{Wand,2} + I_{Boden,1} + I_{Boden,2}}{2 \frac{\pi}{4} \tanh(\lambda_n \alpha) \frac{\lambda_n^2 - 1}{\lambda_n^2}} \tag{2.136}$$

Mit Hilfe eines dimensionslosen Faktors C lässt sich Glg. 2.136 in die folgende Form bringen:

$$\gamma = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{\nu_L \Omega}{2}} C \tag{2.137}$$

Für das Dämpfungsmaß der n -ten Eigenschwingung der Flüssigkeitsoberfläche mit der Eigenfrequenz $\omega_{SL,n}$ ergibt sich daraus:

$$\kappa_{SL,n} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{\nu_L}{2\omega_{SL,n}}} C \tag{2.138}$$

In der Abb. 2.30 ist der C-Wert für den 1. und 2. Eigenmode der Schwappschwingung in Abhängigkeit von der Behälterschlantheit dargestellt. Er lässt sich in die Beiträge der Reibung am Boden und der Behälterwand unterteilen. Für schlanke Behälter ist der Reibungsanteil am Boden sehr gering, da die Flüssigkeitsbewegung nur an der Oberfläche stattfindet und in die Tiefe sehr schnell abklingt.

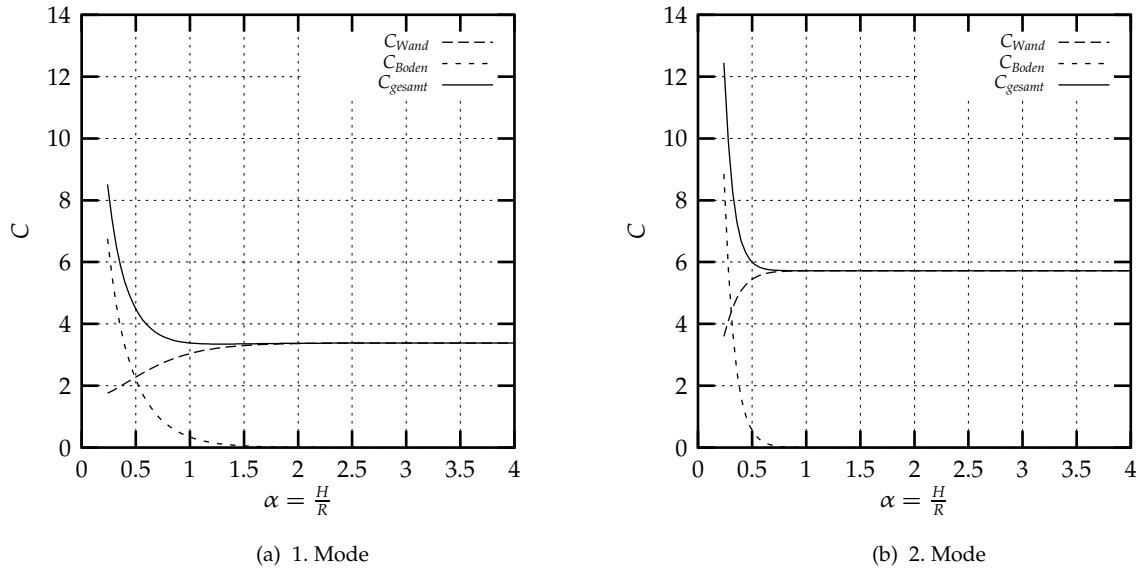
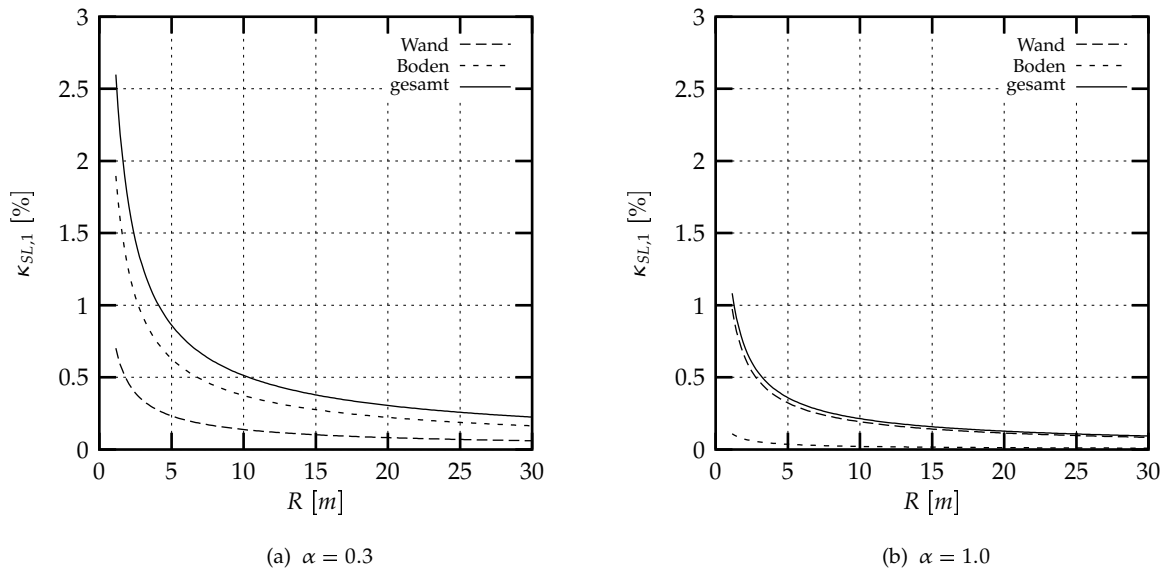


Abb. 2.30: C-Werte für die Schwappschwingung.

Abb. 2.31: Dämpfung der Schwappschwingung im 1. Mode für $\nu_L = 4.20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho_L = 912 \text{ kg/m}^3$ (Öl, SAE 30 bei 15.6 °C).

In der Abb. 2.31 ist das Dämpfungsmaß für die Schlankheiten 0.3 und 1.0 in Abhängigkeit vom Radius angegeben. Es ist zu erkennen, daß bei kleineren Behältern die viskose Flüssigkeitsdämpfung stark ansteigt (exponentiell). Das entspricht der Abnahme des Verhältnisses von Flüssigkeitsoberfläche zu Flüssigkeitsvolumen ($\approx 1/R$). Der Impulstransport durch Diffusion nimmt gegenüber dem durch Konvektion zu. Dies ist zu erwarten, da die Reynoldszahl bei konstanter Strömungsgeschwindigkeit und Viskosität mit kleiner werdenden Abmessungen abnimmt (Glg.

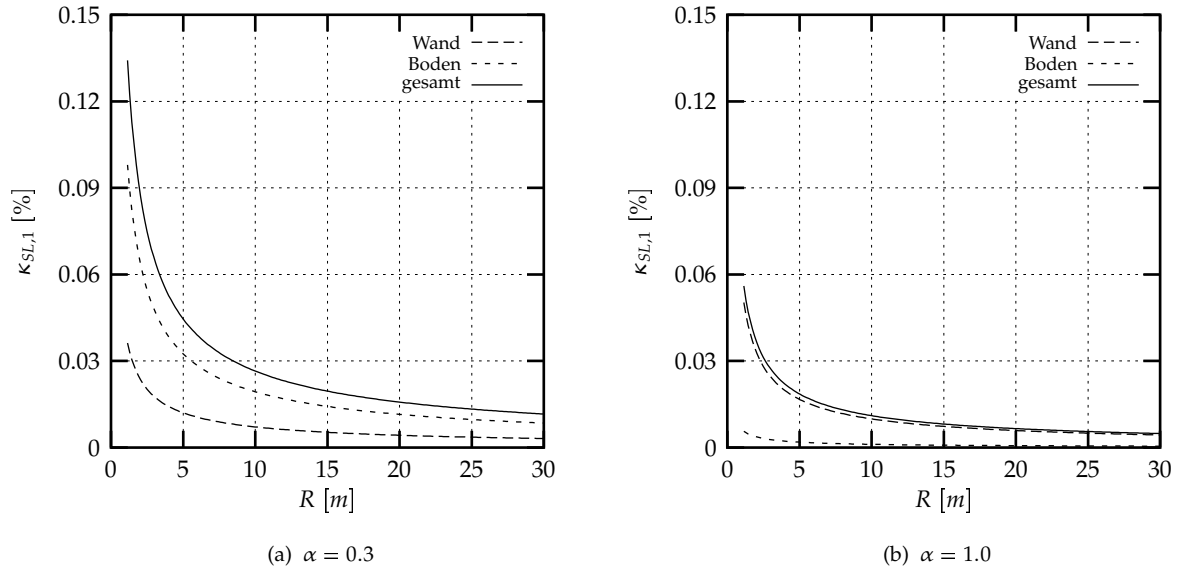


Abb. 2.32: Dämpfung der Schwappschwingung im 1. Mode für $\nu_L = 1.12^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho_L = 999 \text{ kg/m}^3$ (Wasser bei 15.6 °C).

2.139).

$$Re = \frac{vR}{\nu_L} \quad (2.139)$$

Die Reynoldzahl stellt aber auch ein Maß für das Verhältnis des konvektiven zum diffusiven Impulstransport dar.

2.6 Ersatzsystem für das Behälter-Flüssigkeit-Kontinuum

Mit den in den vorangegangenen Abschnitten bestimmten Eigenfunktionen und Eigenwerten ist eine modale Berechnung des Behälter-Flüssigkeit-Systems möglich. Wie auch schon in den Arbeiten von Housner und Haroun [33, 29] dargestellt, wird dabei das Behälter-Flüssigkeit-Kontinuum durch eine Reihe von entkoppelten Einfreiheitsgradschwingern ersetzt (Abb. 2.33).

2.6.1 Modale Berechnung

Die Verschiebungen des kontinuierlichen Systems werden bei der modalen Berechnung aus den Eigenfunktionen der n-ten Biegemodes und der m-ten Umfangsharmonischen $\mathbf{v}_{m,n}$ multipliziert mit einer zugehörigen Zeitfunktion $q_{m,n}(t)$ in Form einer Fourier-Reihe zusammengesetzt.

Der Ansatz für die Verschiebungen lautet:

$$\mathbf{u}(\xi, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{m,n}(\xi) \cos(m\varphi) \\ \chi_{m,n}(\xi) \sin(m\varphi) \\ \psi_{m,n}(\xi) \cos(m\varphi) \end{pmatrix} q_{m,n}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{v}_m(\xi, \varphi) \mathbf{q}_m(t) \quad (2.140)$$

Die Bewegungsgleichungen Glg. 2.41 von Schale und Flüssigkeit lauten damit:

$$\mathbf{M}\mathbf{v}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{S}\mathbf{v}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}\ddot{\mathbf{x}}_g(t) \quad (2.141)$$

Bei der perfekten Zylinderschale treten unter vertikaler bzw. horizontaler Anregung ausschließlich Verformungen der Schale in der 0. und 1. Umfangsharmonischen auf [17]. Die Bewegungen der einzelnen Umfangsharmonischen sind aufgrund der Orthogonalität der Eigenfunktionen in Umfangsrichtung voneinander entkoppelt. In Meridianrichtung der Schale sind die Eigenfunktionen ebenfalls orthogonal zueinander. Damit lässt sich die Bewegungsgleichung 2.141 auf ein System von entkoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen für die 0. und 1. Umfangsharmonische zurückführen (Glg. 2.142a, 2.142b).

$$M_{0,n}\ddot{q}_{0,n}(t) + S_{0,n}q_{0,n}(t) = F_{0,n}a_V(t) \quad (2.142a)$$

$$M_{1,n}\ddot{q}_{1,n}(t) + S_{1,n}q_{1,n}(t) = F_{1,n}a_H(t) \quad (2.142b)$$

mit:

$$\begin{aligned} M_{m,n} &= HR \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{v}_{m,n}(\xi, \varphi)^T \mathbf{M} \mathbf{v}_{m,n}(\xi, \varphi) d\xi d\varphi \\ S_{m,n} &= HR \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{v}_{m,n}(\xi, \varphi)^T \mathbf{S} \mathbf{v}_{m,n}(\xi, \varphi) d\xi d\varphi \\ F_{m,n} &= HR \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{v}_{m,n}(\xi, \varphi)^T \mathbf{F} d\xi d\varphi \end{aligned}$$

Mit dem Modepartizipationsfaktor $\Gamma_{m,n}$ können die Glg. 2.142a, 2.142b in die folgende Form gebracht werden:

$$\ddot{q}_{0,n}(t) + \omega_{0,n}^2 q_{0,n}(t) = -\Gamma_{0,n} a_V(t) \quad (2.143a)$$

$$\ddot{q}_{1,n}(t) + \omega_{1,n}^2 q_{1,n}(t) = -\Gamma_{1,n} a_H(t) \quad (2.143b)$$

mit:

$$\omega_{m,n}^2 = \frac{S_{m,n}}{M_{m,n}} \quad \Gamma_{m,n} = \frac{F_{m,n}}{M_{m,n}}$$

In die Glg. 2.143a, 2.143b kann nachträglich eine viskose Dämpfung $\kappa_{m,n}$ eingeführt werden. Behälter in Stahlbauweise sind nur schwach gedämpft. Für die gemeinsame Schwingung von Schale und Flüssigkeit wird in der Literatur eine Dämpfung von 1% bis 2% angegeben. Für die Dämpfung von Behältern in Stahlbetonbauweise wird ein Wert 5% verwendet [54]. Für die Dämpfung der Schwappschwingung der Flüssigkeit sind die Angaben des Abschnitts 2.5 zu verwenden.

Die Bewegungsgleichung für den n -ten Biegemode nimmt die folgende Form an:

$$\ddot{q}_{0,n}(t) + 2\kappa_{0,n}\omega_{0,n}\dot{q}_{0,n}(t) + \omega_{0,n}^2 q_{0,n}(t) = \Gamma_{0,n} a_V(t) \quad (2.144a)$$

$$\ddot{q}_{1,n}(t) + 2\kappa_{1,n}\omega_{1,n}\dot{q}_{1,n}(t) + \omega_{1,n}^2 q_{1,n}(t) = \Gamma_{1,n} a_H(t) \quad (2.144b)$$

Die Glg. 2.144a und 2.144b sind ausschließlich von der Zeit t abhängig und können z.B. mit den in [35] angegebenen Verfahren integriert werden.

2.6.2 Kenngrößen für das Ersatzsystem

Durch Integration der modalen Druckverteilungen über die Schalenfläche ist es möglich, Massen und Höhenordinaten für ein Ersatzsystem anzugeben. Werden diese mit den zugehörigen

Masse infolge Druck auf den Behälterboden bei vertikaler Anregung	$M_{V,n} = 2\pi R^2 \int_0^1 \bar{p}_n(0, \zeta) \zeta d\zeta$
Masse infolge Druck auf die Behälterwand bei horizontaler Anregung	$M_{H,n} = \pi R H \int_0^1 \bar{p}_n(\xi, 1) d\xi$
Moment infolge Druck auf die Behälterwand bei horizontaler Anregung	$MM_{HW,n} = \pi R H^2 \int_0^1 \bar{p}_n(\xi, 1) \xi d\xi$
Moment infolge Druck auf den Behälterboden bei horizontaler Anregung	$MM_{HB,n} = \pi R^3 \int_0^1 \bar{p}_n(0, \zeta) \zeta^2 d\zeta$
$H_{W,n} = \frac{MM_{HW,n}}{M_{H,n}} \quad H_{B,n} = \frac{MM_{HB,n}}{M_{H,n}} \quad H_{W+B,n} = \frac{MM_{HW,n} + MM_{HB,n}}{M_{H,n}} \quad \bar{p}_n(\xi, \zeta) = \frac{p_n(\xi, \zeta)}{S_{a,n}(t)}$	

Tab. 2.3: Massen für das Ersatzsystem des Behälter-Flüssigkeit-Kontinuums.

Spektralbeschleunigungen $S_{a,m}(t)$ bzw. $S_{a,n}(t)$ multipliziert, so ergeben sich daraus die gleichen resultierenden Kräfte und Momente wie für das kontinuierliche System. In Tab. 2.3 sind die zugehörigen Berechnungsformeln aufgeführt.

2.7 Zusammenfassung

Es wird ein Verfahren entwickelt, mit dem die modale Analyse des Behälter-Flüssigkeit-Kontinuums durchgeführt werden kann. Das Verfahren geht von der Integralgleichungsformulierung des dynamischen Randwertproblems von Kreiszyinderschale und Flüssigkeit aus. Die Flüssigkeit wird als zusätzliche Last auf die Kreiszyinderschale aufgebracht. Zur Aufstellung der Integralgleichungen

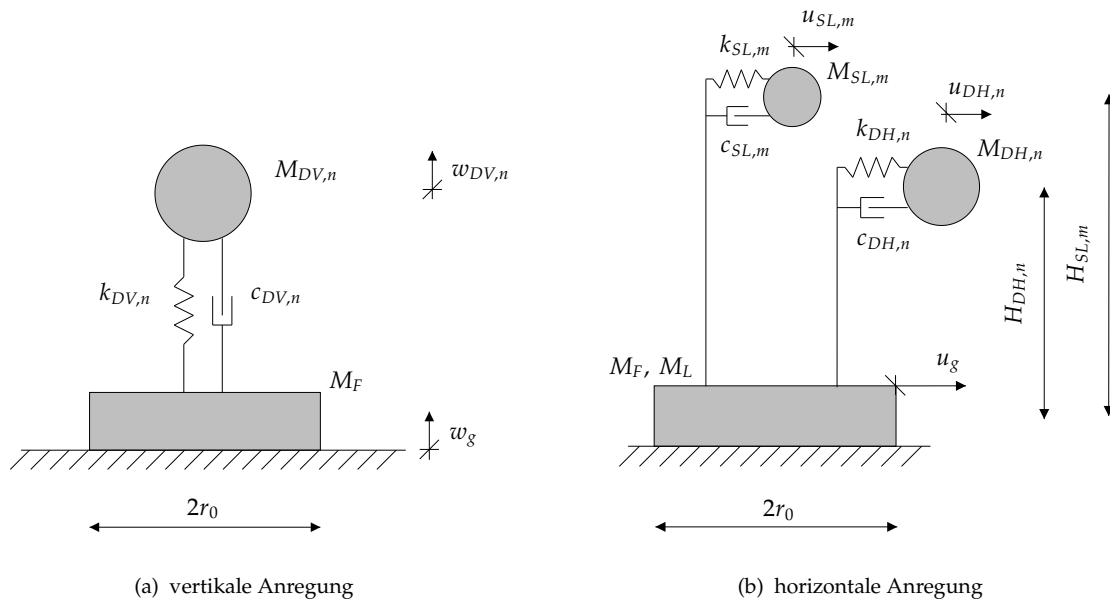


Abb. 2.33: Ersatzsysteme für das Behälter-Flüssigkeit-Kontinuum

chung ist die Kenntnis der Einflußfunktion der statisch belasteten Schale notwendig. Die Lösung der Integralgleichung erfolgt durch schrittweise Näherung.

Das entwickelte Verfahren erlaubt eine schnelle und genaue Berechnung der Eigenformen und Eigenwerte. Durch die Verwendung dimensionsloser Parameter ermöglicht es eine bessere Nachvollziehbarkeit des dynamischen Verhaltens des Behälter-Flüssigkeit-Systems. Mit den abgeleiteten Ersatzgrößen, den normierten Druckverteilungen und den $C_{m,n}$ -Werten zur Bestimmung der Eigenfrequenzen ist eine einfache Ermittlung des Schwingungsverhaltens möglich.

Die durchgeführten Parameteruntersuchungen zeigen, daß die Kopplung der axialen mit den radialen bzw. Umfangsverformungen der Schale vernachlässigt werden kann. Damit ist eine wesentliche Vereinfachung der zu lösenden Gleichungen möglich. Weiterhin ist die Schalenmasse bei Wandstärken von $R/d \geq 500$ für das Schwingungsverhalten ohne Bedeutung und kann damit bei Stahlbehältern üblicher Geometrie unberücksichtigt bleiben. Das Eigenwertproblem der flüssigkeitsgefüllten Kreiszyinderschale ist in diesem Fall noch von den folgenden Parametern abhängig:

- Schlankheit $\alpha = H/R$, Radius R bzw. Höhe H , Wanddicke d , Elastizitätsmodul E und Querdehnzahl ν der Schale
- Dichte ρ_L der Flüssigkeit
- Randbedingungen an den Schalenrändern

Die Eigenfrequenzen werden als normierte Größen in bezug auf Elastizitätsmodul und Dichte sowie Radius (0. Umfangsharmonische) bzw. Höhe (1. Umfangsharmonische) des Behälters angegeben. Es ist daraus zu erkennen, daß die Eigenfrequenzen direkt proportional zum Elastizitätsmodul und der Dicke der Schale und indirekt proportional zur Dichte der Flüssigkeit sind. Weiterhin sind die Eigenfrequenzen indirekt proportional zum Schalenradius bzw. zur Schalenhöhe.

Für die Eigenfrequenzen der abgestuften Wanddicke können näherungsweise diejenigen einer konstanten Wandstärke verwendet werden, da eine abgestufte Wanddicke zu kleineren Antwortgrößen als eine konstante Wandstärke führt. Als konstante Wandstärke ist dabei die Dicke der abgestuften Wand bei einer Höhe von $\xi = 1/3$ zu benutzen.

Mit dem Verfahren sind ausschließlich lineare Berechnungen möglich. Zur Anwendung für vereinfachte Berechnungen von seismisch beanspruchten verankerten Behältern bedeutet das aber keine wesentliche Einschränkung. Mit denen durch die modale Analyse gewonnenen Eigenwerten und Eigenfunktionen ist es möglich, das Behälter-Flüssigkeit-Kontinuum auf eine Reihe von entkoppelten Einfreiheitsgradschwingern zurückzuführen.

Eine Erweiterung des Berechnungsverfahrens zur Erfassung einer abgestuften Wandstärke, unterschiedlicher Lagerungsbedingungen und einer rotationssymmetrischen Dachkonstruktion ist ohne Schwierigkeiten möglich. Die Integralgleichungsmethode ist auch auf komplexe Funktionen anwendbar. Es wäre deshalb auch möglich, eine Materialdämpfung der Schale bei der Bestimmung der Eigenwerte und -funktionen zu berücksichtigen.

Es wird nachgewiesen, daß die Flüssigkeitskompressibilität auf die Interaktionsschwingung von Schale und Flüssigkeit nur einen sehr geringen Einfluß besitzt und vernachlässigt werden kann.

Für die Schwappschwingung wird ein Verfahren angegeben, mit dem der Dämpfungseinfluß der Flüssigkeitsviskosität berücksichtigt werden kann. Dafür wird der Potentialströmung der Flüssigkeit eine Reibungsströmung derart überlagert, daß die Randbedingungen tangential zur Flüssigkeitsoberfläche erfüllt werden. Damit werden für die Schwappschwingung in Abhängigkeit von der Behältergeometrie und der Flüssigkeitsviskosität modale Dämpfungsmaße angegeben. Bezüglich der Schwappschwingung lassen sich folgende Feststellungen hinsichtlich der Dämpfungswirkung der Flüssigkeitsviskosität treffen:

- Das Dämpfungsmaß nimmt mit zunehmendem Flüssigkeitsvolumen ab, da sich das Verhältnis von Flüssigkeitsoberfläche zu Flüssigkeitsvolumen verringert.
- Mit zunehmender Eigenfrequenz der Schwappschwingung nimmt der Dämpfungsfaktor γ zu; das bedeutet, daß höhere Modes der Schwappschwingung stärker gedämpft sind.

Das Verfahren ist auch auf die impulsive Druckkomponente aus der Interaktion von Schale und Flüssigkeit übertragbar.

3 Interaktion von Fundament und Untergrund

Um mit der Substrukturmethode die Behälter-Untergrund-Interaktion erfassen zu können, ist es entsprechend dem Berechnungsablauf nach Tab. 1.2 erforderlich, das Verhalten des Teilsystems Fundament-Untergrund zu analysieren. Für die Ingenieurverfahren bedeutet dies, daß das kontinuierliche Fundament-Untergrund-System durch diskrete Feder-Dämpfer-Elemente zu ersetzen ist. Bei einer Behandlung im Frequenzbereich werden die Eigenschaften der Feder-Dämpfer-Elemente durch Impedanzfunktionen beschrieben. Im folgenden Kapitel werden für die flexible Kreisplattengründung von Flüssigkeitsbehältern spezielle Impedanzfunktionen ermittelt.

Als Ausgangspunkt dienen dazu die in *Abschnitt 3.1* angegebenen Bewegungsgleichungen des linear-elastischen Halbraums bei harmonischer Belastung.

In den *Abschnitten 3.2* und *3.3* werden aus diesen Gleichungen die vertikalen Verschiebungen der Halbraumoberfläche für die axialsymmetrische und die antimetrische schlaaffe Kreisflächenlast ermittelt. Dabei werden die Lösungen von Reissner [50] und Lysmer [41] für die axialsymmetrische Belastung verwendet und auf die antimetrische Belastung erweitert.

In *Abschnitt 3.4* wird das starre Kreisfundament untersucht. Es werden die Impedanzfunktionen für die Anregung durch eine vertikale harmonische Belastung ermittelt. Dazu wird die Ringmethode von Lysmer [41] verwendet. Die Ringmethode wird auf die Anregung durch ein Moment erweitert, und es werden die Impedanzfunktionen für diese Belastung bestimmt. Für die Anregung durch eine horizontale Kraft und die Kopplung von horizontaler und Momentenanregung werden die Impedanzfunktionen der Literatur entnommen.

In *Abschnitt 3.5* erfolgt die Erweiterung der Ringmethode auf flexible Kreisplattenfundamente. Es werden die Impedanzfunktionen für das flexible Fundament bei axialsymmetrischer und antimetrischer Randlast ermittelt und mit den Ergebnissen für das starre Kreisfundament verglichen.

Mit den Überlegungen der vorangegangenen *Abschnitte 3.1* bis *3.5* werden in *Abschnitt 3.6* Impedanzfunktionen für das flexible Kreisplattenfundament von Flüssigkeitsbehältern bei antimetrischer Belastung ermittelt, wobei die Besonderheiten der Lastverteilung auf die Bodenplatte zu berücksichtigen sind.

3.1 Gleichungen für den linear-elastischen Halbraum

Die Verschiebungen des linear-elastischen Halbraums unter harmonischer Anregung können durch die Glg. 3.1 beschrieben werden (Naviersche Gleichung). Sie können z.B. aus Bycroft [7] entnommen werden. Volumenkräfte werden dabei nicht berücksichtigt. Die Trägheitskräfte des Halbraums werden jedoch erfaßt. Die Anregung erfolgt über Normalspannungen an der Halb-

raumoberfläche (Randbedingungen).

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \varphi} + 2\mu \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial z} &= -\rho_s \Omega^2 u \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - 2\mu \frac{\partial \Psi_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \Psi_z}{\partial r} &= -\rho_s \Omega^2 v \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial(r\Psi_\varphi)}{\partial r} + 2\frac{\mu}{r} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \varphi} &= -\rho_s \Omega^2 w
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit:

$$\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \Psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

und:

$$\lambda = \frac{\nu_s E_s}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \quad \mu = \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)}$$

Unter der Wirkung einer schlaffen Kreisflächenlast auf der Halbraumoberfläche müssen die Lösungen den nachfolgenden Randbedingungen (Glg. 3.2) genügen. Zwischen Fundament und Untergrund auftretende Schubspannungen werden nicht berücksichtigt.

$$\begin{aligned}
 \sigma_z = \tau = 0 & \quad \text{für } r > r_0 \\
 \sigma_z = p(r, \varphi, 0); \tau = 0 & \quad \text{für } r \leq r_0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Damit in der Lösung keine aus dem Unendlichen einfallende Wellen enthalten sind, ist die Ausstrahlungsbedingung nach Sommerfeld [65] einzuhalten.

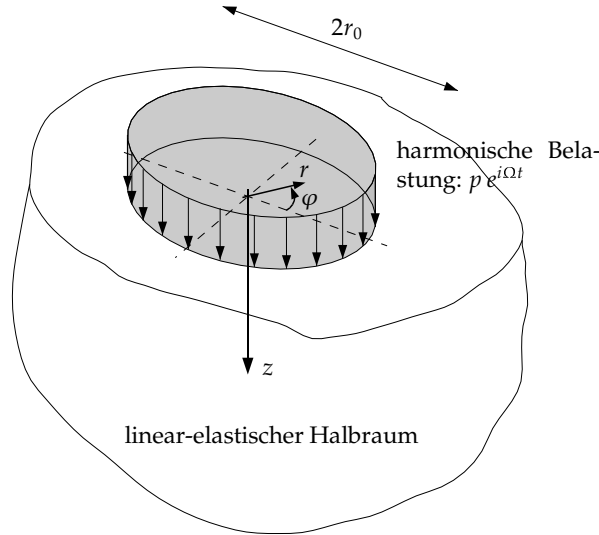


Abb. 3.1: Axialsymmetrische Lastverteilung und Bezeichnungen.

3.2 Axialsymmetrische schlafe Kreisflächenlast

3.2.1 Statische Belastung

Die vertikalen Verschiebungen für eine konstante schlafe Kreisflächenlast lassen sich mit den Glg. 3.3 ermitteln [18].

$$w(\zeta) = -\frac{pr_0}{G_S} \frac{2(1-\nu_S)}{\pi} \begin{cases} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\zeta^2 \sin^2 \varphi} d\varphi & \text{für } \zeta < 1 \\ 1 & \text{für } \zeta = 1 \\ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{\zeta^2 - \sin^2 \varphi}} & \text{für } \zeta > 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2.2 Dynamische Belastung

Entsprechend der Arbeit von Reissner [50] kann die vertikale Oberflächenverschiebung durch die Glg. 3.4 bestimmt werden.

$$\begin{aligned} w(\zeta, t) &= \frac{pr_0}{G_S} \left[\int_0^\infty \frac{g(\Theta, \theta)}{f(\Theta, \theta)} J_0(\zeta a_0 \Theta) J_1(a_0 \Theta) d\Theta + i\pi \frac{g(\epsilon, \theta)}{f'(\epsilon, \theta)} J_0(\zeta a_0 \epsilon) J_1(a_0 \epsilon) \right] e^{i\Omega t} \\ &= \frac{pr_0}{G_S} g(a_0, \zeta) e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit:

$$\begin{aligned} f(\Theta, \theta) &= (2\Theta^2 - 1)^2 - 4\Theta^2 \sqrt{\Theta^2 - 1} \sqrt{\Theta^2 - \theta^2} & g(\Theta, \theta) &= \sqrt{\Theta^2 - \theta^2} \\ a_0 &= \frac{\Omega r_0}{v_S} & \theta^2 &= \frac{1 - 2\nu_S}{2(1 - \nu_S)} & \epsilon &= \text{Nullstelle von } f(\Theta, \theta) \end{aligned}$$

Die Auswertung des infolge der oberen Integrationsgrenze und der Polstelle des Integranden bei ϵ uneigentlichen Integrals kann nach dem von Lysmer [41] angegebenen Verfahren durchgeführt werden. Zur numerischen Berechnung der dabei auftretenden Integrale wurde das Programm ©MATLAB R11 und dessen Standardfunktion `quad8` verwendet.

In den Abb. 3.3(a) und 3.3(b) sind Real- und Imaginärteil der Funktion $g(a_0, \zeta)$ für $0 \leq a_0 \leq 8$ und $0 \leq \zeta \leq 20$ dargestellt.

3.3 Antimetrische schlafe Kreisflächenlast

3.3.1 Statische Belastung

Die vertikalen Verschiebungen für eine linear veränderliche schlafe Kreisflächenlast lassen sich mit den Gleichungen 3.5 ermitteln [18].

$$w(\zeta, \varphi) = -\frac{pr_0}{G_S} \frac{2(1-\nu_S)}{3\pi} \begin{cases} \frac{3}{4}\pi\zeta \left(1 - \frac{3}{8}\zeta^2 - \frac{5}{64}\zeta^4 - \frac{35}{1024}\zeta^6 \dots \right) & \text{für } \zeta < 1 \\ 1 & \text{für } \zeta = 1 \\ \frac{3}{16}\pi\zeta^{-1} \left(1 + \frac{1}{4}\zeta^{-2} + \frac{15}{128}\zeta^{-4} + \frac{35}{512}\zeta^{-6} \dots \right) & \text{für } \zeta > 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

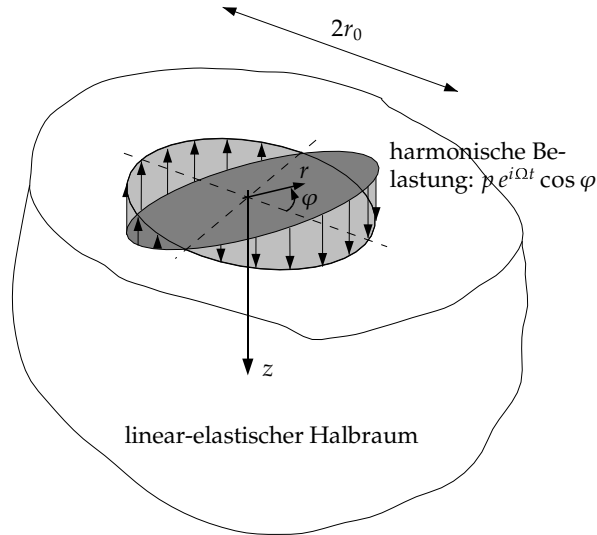


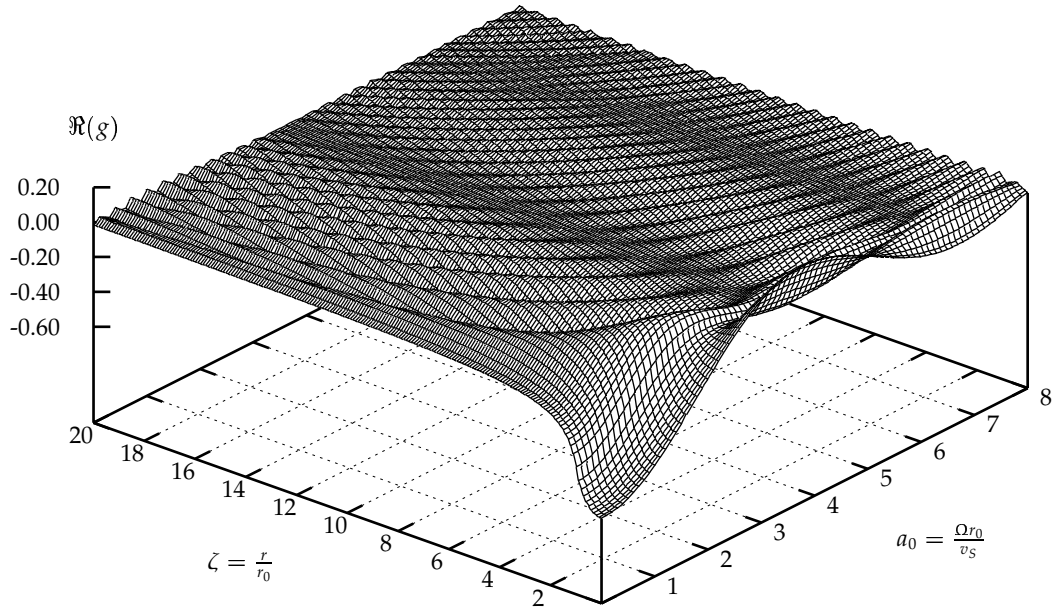
Abb. 3.2: Antimetrische Lastverteilung und Bezeichnungen.

3.3.2 Dynamische Belastung

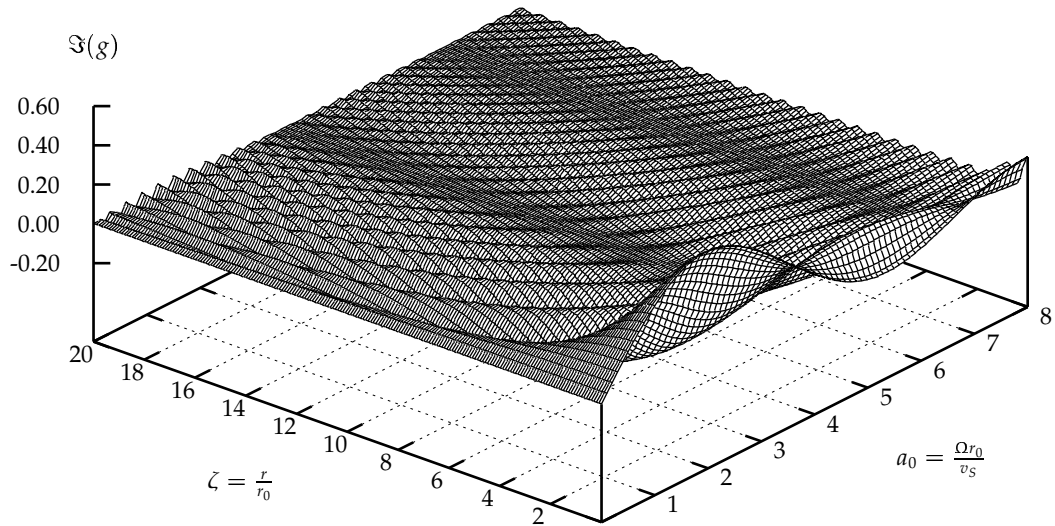
Nach Bycroft [7] wird die vertikale Oberflächenverschiebung durch die Glg. 3.6 ermittelt.

$$\begin{aligned}
 w(\zeta, t, \varphi) &= \frac{pr_0}{G_s} \left[\int_0^\infty \frac{g(\Theta, \theta)}{f(\Theta, \theta)} J_1(\zeta a_0 \Theta) J_2(a_0 \Theta) d\Theta + i\pi \frac{g(\epsilon, \theta)}{f'(\epsilon, \theta)} J_1(\zeta a_0 \epsilon) J_2(a_0 \epsilon) \right] e^{i\Omega t} \\
 &= \frac{pr_0}{G_s} g(a_0, \zeta, \varphi) e^{i\Omega t}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die Auswertung des uneigentlichen Integrals wird analog zur axialsymmetrischen Belastung durchgeführt. In den Abb. 3.4(a) und 3.4(b) sind Real- und Imaginärteil der Funktion $g(a_0, \zeta, \varphi)$ für $0 \leq a_0 \leq 8$, $0 \leq \zeta \leq 20$ und $\varphi = 0$ angegeben.

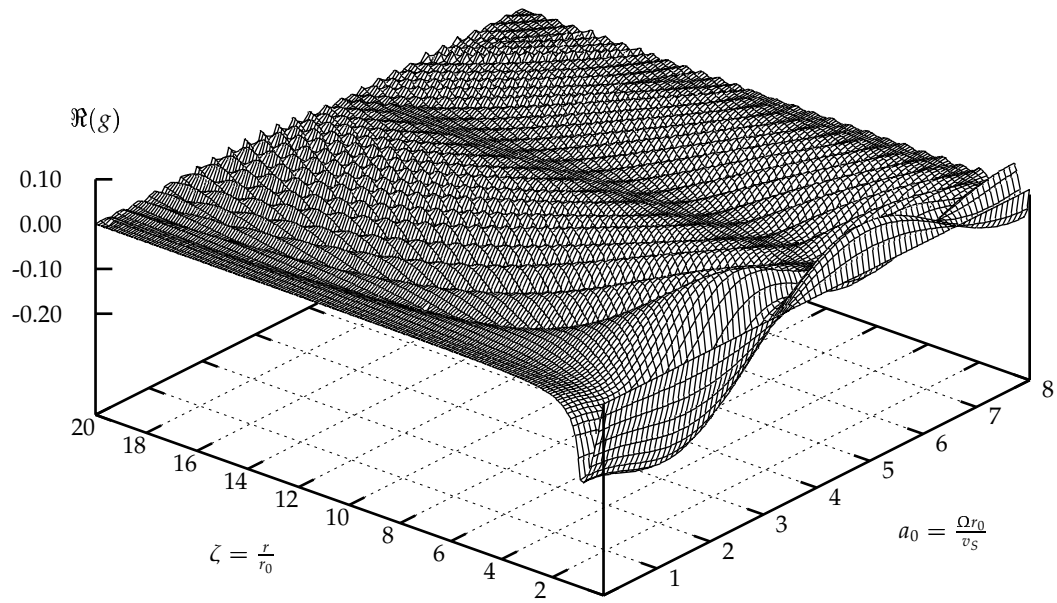


(a) Realteil

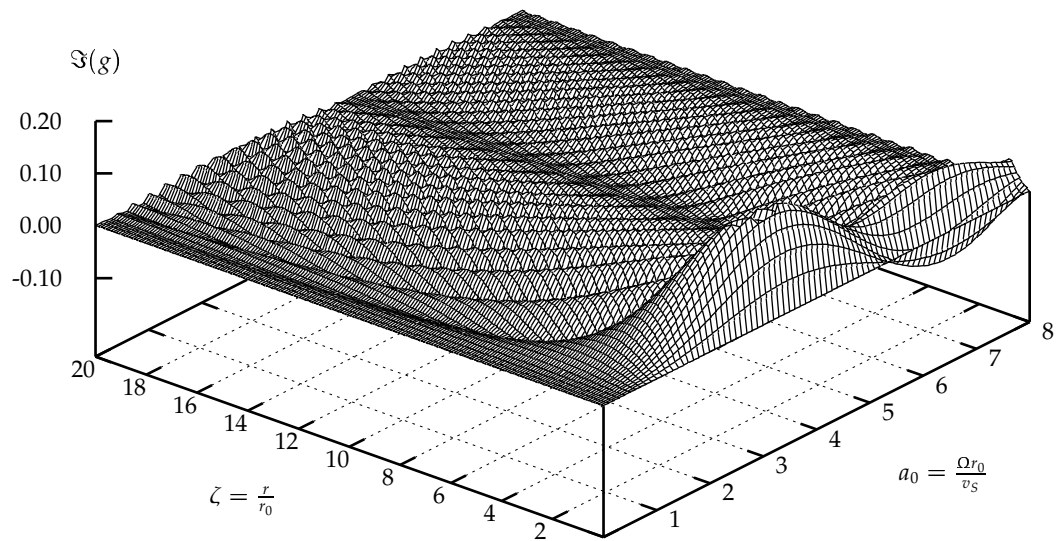


(b) Imaginärteil

Abb. 3.3: Axialsymmetrische schlaffe Kreisflächenlast: Funktion $g(a_0, \zeta, \theta)$.



(a) Realteil



(b) Imaginärteil

Abb. 3.4: Antimetrische schlaife Kreisflächenlast: Funktion $g(a_0, \zeta, \theta)$.

3.4 Starres Kreisfundament

Die Berechnung des starren Fundaments unter harmonischer Belastung kann nach der Ringmethode von Lysmer [41] mit Hilfe der Verschiebungen an der Halbraumoberfläche infolge einer schlaffen Last durchgeführt werden. Sie entspricht dem bei statischer Belastung angewandten Steifzahlverfahren (z.B. Kany [34]). Für die vertikale und die Momentenbelastung wird angenommen, daß keine Schubspannungen zwischen Fundament und Halbraumoberfläche auftreten.

3.4.1 Vertikale Anregung

Unter einem starren Fundament sind die Setzungen über die gesamte Fundamentfläche konstant. Die Verteilung der Spannungen unter dem Fundament ist zunächst unbekannt. Sie ist abhängig von der Anregungsfrequenz a_0 . Für eine statische Last ($a_0 = 0$) ergeben sich die vertikalen Spannungen aus der Lösung von Boussinesq. Bei hohen Frequenzen ($a_0 \geq 8$) können die Spannungen über die Fundamentfläche als konstant angesehen werden (Lysmer [41]). Im mittleren Frequenzbereich ($0 < a_0 < 8$) ist es möglich, die Spannungsverteilungen mit der Ringmethode zu ermitteln.

Ringmethode

Das Fundament wird in L konzentrische Ringe eingeteilt (Abb. 3.5). Innerhalb jedes Rings wird eine konstante Spannungsverteilung $p_k = q_k p$ angenommen ($p = \frac{p_r}{\pi r_0^2}$: mittlere Spannung, q_k : Koeffizienten). Die Koeffizienten q_k werden so bestimmt, daß eine konstante Setzung über die Fundamentfläche vorhanden ist. Die Verschiebung im Mittelpunkt des l -ten Rings ($\zeta = \frac{2l-1}{L}$) infolge der Ringlast p_k des k -ten Rings ergibt sich mit den Funktionen von Reissner (Glg. 3.3 und 3.4) aus der Glg. 3.7.

$$w_{k,l} = \frac{pr_0}{G_S} q_k \left[\frac{k}{L} g \left(a_0 \frac{k}{L}, \frac{2l-1}{2k} \right) - \frac{(k-1)}{L} g \left(a_0 \frac{k-1}{L}, \frac{2l-1}{2(k-1)} \right) \right] \quad (3.7)$$

Die Verschiebung des Punktes $\zeta = \frac{2l-1}{L}$ infolge aller Ringlasten $k = 1..L$ ergibt sich aus der Summation der Glg. 3.7 über alle $k = 1..L$ nach Glg. 3.8.

$$w_l = \frac{pr_0}{G_S} \sum_{k=1}^L q_k c_{k,l} \quad (3.8)$$

mit

$$c_{k,l} = \frac{k}{L} g \left(a_0 \frac{k}{L}, \frac{2l-1}{2k} \right) - \frac{(k-1)}{L} g \left(a_0 \frac{k-1}{L}, \frac{2l-1}{2(k-1)} \right) \quad (3.9)$$

Die vertikalen Verschiebungen müssen an den mittleren Radien aller Ringe l gleich sein ($w_l = w_L$). Daraus ergeben sich $L - 1$ Gleichungen (Glg. 3.10).

$$\sum_{k=1}^L q_k (c_{k,l} - c_{k,L}) = 0 \quad l = 1..(L-1) \quad (3.10)$$

Weiterhin ist das Gleichgewicht der vertikalen Kräfte einzuhalten (Glg. 3.11).

$$\sum_{k=1}^L q_k (2k-1) = L^2 \quad (3.11)$$

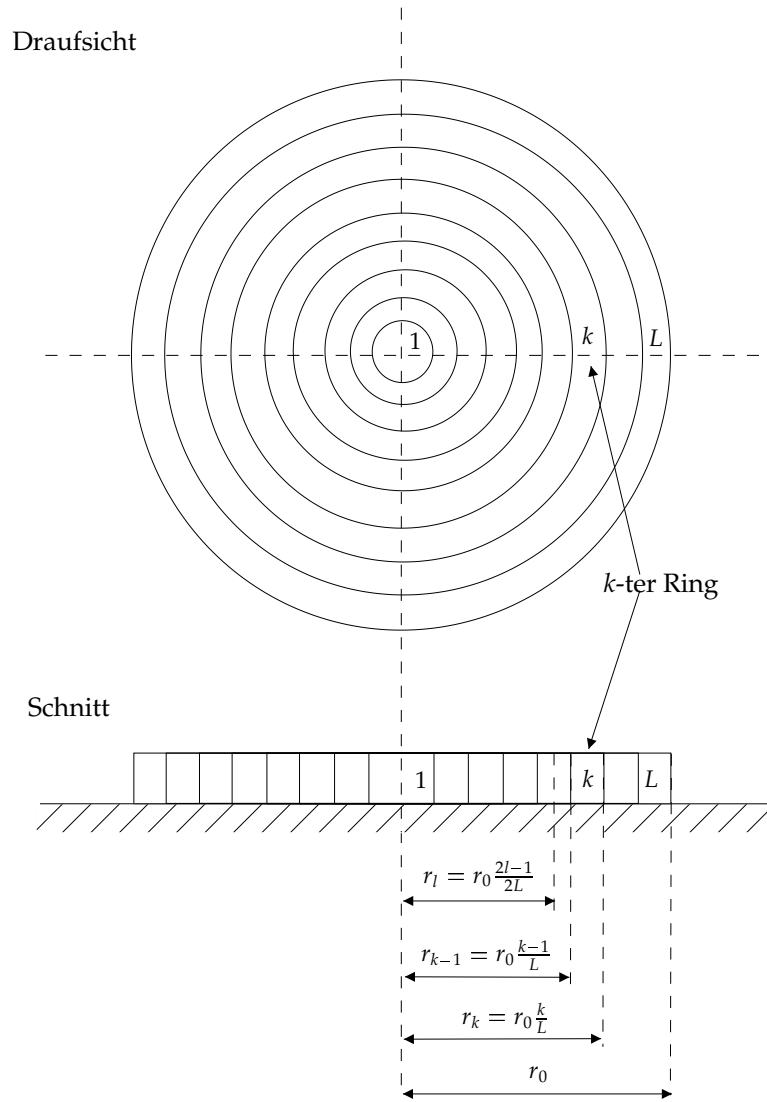


Abb. 3.5: Unterteilung der Fläche des Kreisfundaments in konzentrische Ringe zur Bestimmung der Spannungsverteilung unter den Ringen.

Damit stehen L Gleichungen zu Bestimmung der Koeffizienten q_k , $k = 1..L$ zur Verfügung. Die Koeffizienten q_k und die Funktionswerte $c_{k,l}$ sind komplexe Größen. Die Setzung des Fundaments kann mit den Koeffizienten q_k und Glg. 3.8 bestimmt werden.

Impedanzfunktion

Entsprechend Lysmer [41] kann das kontinuierliche System "starres Fundament-Halbraum" durch ein Feder-Dämpfer- bzw. Feder-Dämpfer-Masse-System ersetzt werden. Dieses diskrete System wird durch die frequenzabhängige Impedanzfunktion K_V beschrieben. Sie ist definiert als Quotient der harmonischen Anregungskraft und der daraus resultierenden Verschiebung (Glg. 3.12).

$$K_V(\Omega) = \frac{P(\Omega)}{w(\Omega)} \quad (3.12)$$

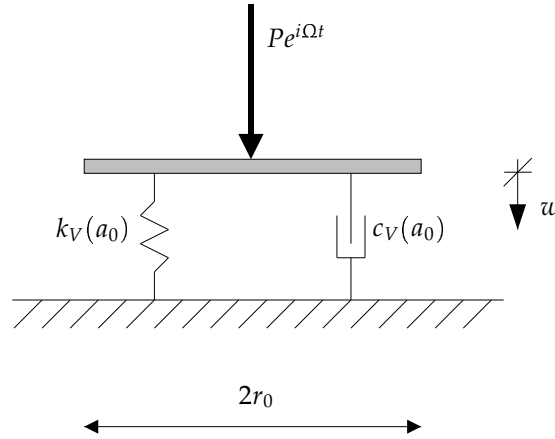


Abb. 3.6: Ersatzsystem für das Fundament-Untergrund-Kontinuum ohne Berücksichtigung der Fundamentmasse.

Für den Fall des masselosen Fundaments läßt sie sich in der Form von Glg. 3.13 darstellen (s.a. Abb. 3.6). Die Impedanzfunktion kann in Abhängigkeit von der dimensionslosen Anregungsfrequenz $a_0 = \frac{\Omega r_0}{v_s}$ angegeben werden.

$$\begin{aligned} K_V &= K_v [k_v(a_0) + i a_0 c_v(a_0)] \\ K_v &= \frac{4G_S r_0}{1 - \nu_S} \quad (\text{statische Steifigkeit}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Werte von k_v und c_v lassen sich mit den Koeffizienten q_l und der Glg. 3.8 aus den folgenden Beziehungen ermitteln (Glg. 3.14).

$$k_v = \Re \frac{\pi(1 - \nu_S)}{4 \sum_{k=1}^L q_k c_{k,l}} \quad c_v = \Im \frac{\pi(1 - \nu_S)}{4 a_0 \sum_{k=1}^L q_k c_{k,l}} \quad (3.14)$$

In der Abb. 3.7 sind die Koeffizienten k_v und c_v für $\nu_S = 1/3$ und $0 \leq a_0 \leq 8.0$ dargestellt. Es ist zusätzlich einen Vorschlag von Veletsos und Verbic [76] zur näherungsweisen Bestimmung der Koeffizienten enthalten. Ein Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren (z.B. [21, 62]) zeigt, daß eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse vorliegt.

3.4.2 Horizontale Anregung

Die Impedanzfunktion für die horizontale Anregung wird durch die Flexibilität des Fundaments nur gering beeinflußt (Liou und Huang [39]). Es ist deshalb ausreichend genau, die Impedanzfunktion für starre Fundamente auch auf das flexible Fundament anzuwenden. Für das masselose Fundament nimmt die Impedanzfunktion die Form von Glg. 3.15 an.

$$\begin{aligned} K_H &= K_h [k_h(a_0) + i a_0 c_h(a_0)] \\ K_h &= \frac{8G_S r_0}{2 - \nu_S} \quad (\text{statische Steifigkeit}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

In Abb. 3.8 sind die Ergebnisse der Berechnungen von Veletsos und Wei [77] angegeben. Weiterhin ist ein Näherungsvorschlag von Veletsos und Verbic [76] dargestellt.

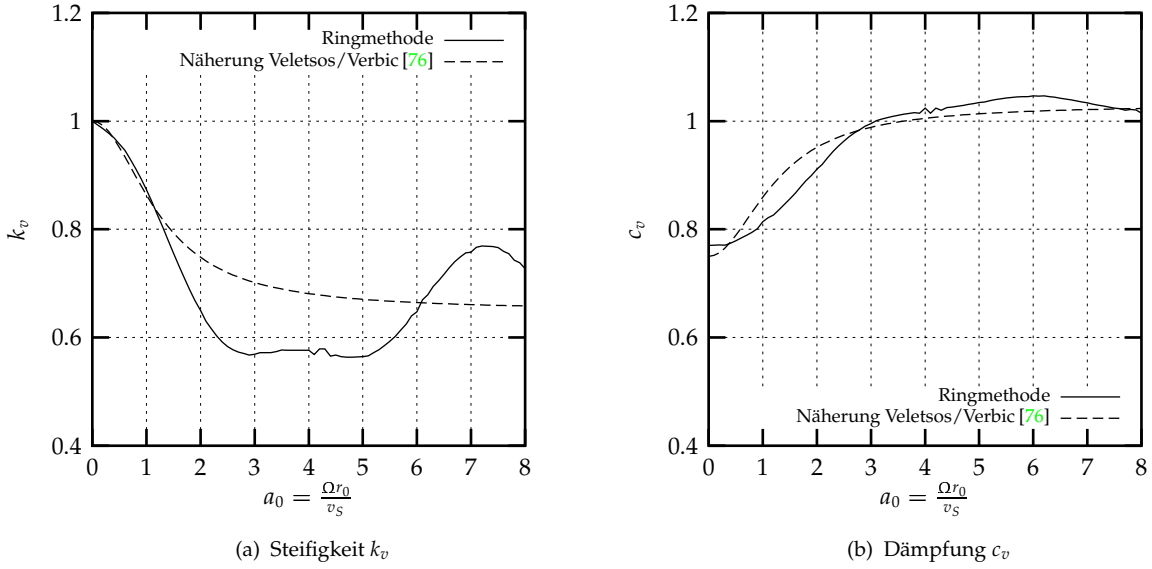


Abb. 3.7: Impedanzfunktion für das starre Fundament auf elastischem Halbraum bei vertikaler, harmonischer Anregung mit $\nu_S = 1/3$.

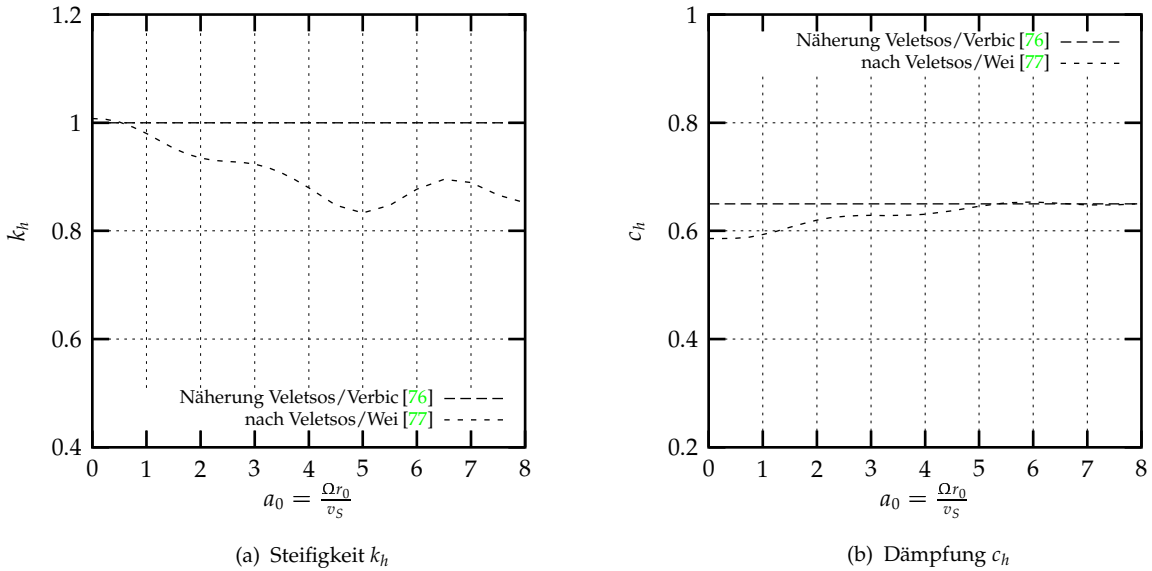


Abb. 3.8: Impedanzfunktion für das starre Fundament auf elastischem Halbraum bei horizontaler, harmonischer Anregung mit $\nu_S = 1/3$.

3.4.3 Anregung durch ein Moment

Die Verdrehung des starren Fundamentes kann ebenfalls mit der Ringmethode [41] bestimmt werden. Sie ist auf eine antimetrische Sohlspannungsverteilung zu erweitern.

Das Fundament wird wieder in L konzentrische Ringe eingeteilt. Die Spannung am Außenradius

wird mit $p_k = q_k \frac{MM}{r_0^3}$ angenommen (MM: Gesamtmoment, q_k : Koeffizient). Innerhalb eines jeden Rings ist die Spannungsverteilung linear: $p_{k-1} = p_k \frac{k-1}{k}$. Die Koeffizienten q_k werden so bestimmt, daß eine konstante Verdrehung über den Fundamentradius bei $\varphi = 0$ auftritt. Die Setzung am mittleren Radius des l -ten Rings ($\zeta = \frac{2l-1}{L}$) infolge der Ringlast p_k des k -ten Rings ergibt sich mit den Funktionen der Glg. 3.5 und 3.6 aus der Glg. 3.16.

$$w_{k,l} = \frac{MM}{G_S r_0^2} q_k \left[\frac{k}{L} \mathcal{G} \left(a_0 \frac{k}{L}, \frac{2l-1}{2k} \right) - \frac{(k-1)^2}{k^2} \frac{k}{L} \mathcal{G} \left(a_0 \frac{k-1}{L}, \frac{2l-1}{2(k-1)} \right) \right] \quad (3.16)$$

Die Verschiebung des Punktes $\zeta = \frac{2l-1}{L}$ infolge aller Ringlasten $k = 1..L$ ergibt sich aus der Summation der Glg. 3.16 über alle k nach Glg. 3.17.

$$w_l = \frac{MM}{G_S r_0^2} \sum_{k=1}^L q_k c_{k,l} \quad (3.17)$$

mit:

$$c_{k,l} = \frac{k}{L} \mathcal{G} \left(a_0 \frac{k}{L}, \frac{2l-1}{2k} \right) - \frac{(k-1)^2}{k^2} \frac{k}{L} \mathcal{G} \left(a_0 \frac{k-1}{L}, \frac{2l-1}{2(k-1)} \right)$$

Damit die Verdrehung über den Radius bei $\varphi = 0$ konstant ist, muß zwischen den Verschiebungen der Punkte $\zeta = \frac{2l-1}{2L}$ und dem Punkt L die Beziehung nach Glg. 3.18 gelten.

$$w_l = w_L \frac{2l-1}{2L-1} \quad l = 1..(L-1) \quad (3.18)$$

Daraus ergeben sich $L-1$ Gleichungen (Glg. 3.19).

$$\sum_{k=1}^L q_k \left(c_{k,l} - \frac{2l-1}{2L-1} c_{k,L} \right) = 0 \quad l = 1..(L-1) \quad (3.19)$$

Weiterhin ist das Momentengleichgewicht einzuhalten (Glg. 3.20).

$$\sum_{k=1}^L q_k \frac{k^4 - (k-1)^4}{L^3 k} = \frac{4}{\pi} \quad (3.20)$$

Damit stehen wieder L Gleichungen zu Bestimmung der Koeffizienten q_k zur Verfügung. Die Verschiebung w_L wird als klein gegenüber dem Radius r_L vorausgesetzt. Der Winkel der Verdrehung kann näherungsweise gleich dem Tangens des Winkels gesetzt werden. Die Verdrehung des Fundaments ergibt sich damit aus den Verschiebungen w_l unter Verwendung der Koeffizienten q_k aus Glg. 3.21.

$$\phi = \frac{w_l}{r_0} \frac{2L}{2l-1} \quad (3.21)$$

Impedanzfunktion

Das kontinuierliche System "starres Fundament-Halbraum" kann wieder durch ein Feder-Dämpfer-System ersetzt werden. Die zugehörige Impedanzfunktion ist definiert als Quotient des harmonischen Anregungsmoments und der daraus resultierenden Verdrehung (Glg. 3.22).

$$K_R(\Omega) = \frac{MM(\Omega)}{\phi(\Omega)} \quad (3.22)$$

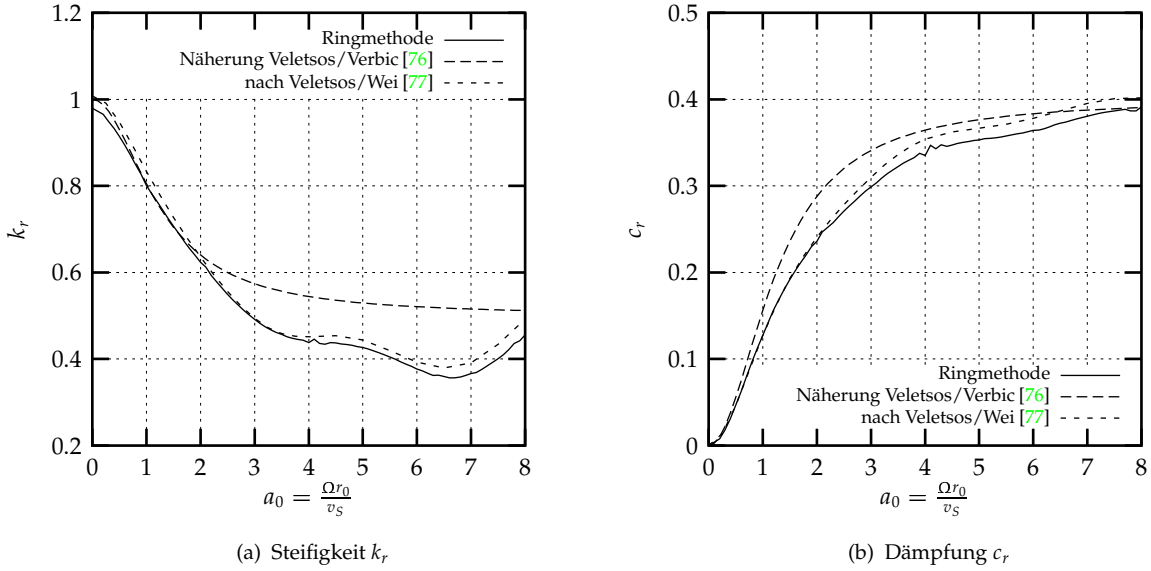


Abb. 3.9: Impedanzfunktion für das starre Fundament auf elastischem Halbraum bei harmonischer Momentenanregung mit $\nu_S = 1/3$.

Für das masselose Fundament nimmt sie die Form von Glg. 3.23 an.

$$K_R = K_r [k_r(a_0) + ia_0 c_r(a_0)] \quad (3.23)$$

$$K_r = \frac{8G_S r_0^3}{3(1 - \nu_S)} \quad (\text{statische Steifigkeit})$$

Die Werte von k_r und c_r lassen sich mit den Koeffizienten q_l und der Glg. 3.21 aus den folgenden Beziehungen ermitteln (Glg. 3.24).

$$k_r = \Re \left[\frac{3(1 - \nu_S)}{8} \frac{2l - 1}{2L} \frac{1}{\sum_{k=1}^L q_k c_{k,l}} \right] \quad c_r = \Im \left[\frac{3(1 - \nu_S)}{8} \frac{2l - 1}{2L} \frac{1}{a_0 \sum_{k=1}^L q_k c_{k,l}} \right] \quad (3.24)$$

In der Abb. 3.9 sind die Koeffizienten k_r und c_r der Impedanzfunktion für $\nu_S = 1/3$ und $0 \leq a_0 \leq 8.0$ angegeben. Sie zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Arbeit von Veletsos und Wei [77]. Die Abb. 3.9 enthält zusätzlich einen Vorschlag von Veletsos und Vebic [76] zur näherungsweisen Bestimmung der Koeffizienten k_r und c_r .

3.4.4 Kopplung von horizontaler und Kippbewegung

Die Kopplung zwischen Horizontal- und Kippbewegung wird durch die Fundamentflexibilität nur beeinflusst, wenn Schubspannungen zwischen Fundament und Halbraum auftreten (Liou und Huang [39]). Nach den Voraussetzungen ist die gesamte Halbraumoberfläche schubspannungsfrei. Es werden deshalb für die Kopplung von Horizontal- und Kippbewegung die Impedanzfunktionen für das starre Fundament verwendet. In Abb. 3.10 sind die Ergebnisse der Berechnungen von Veletsos und Wei [77] angegeben.

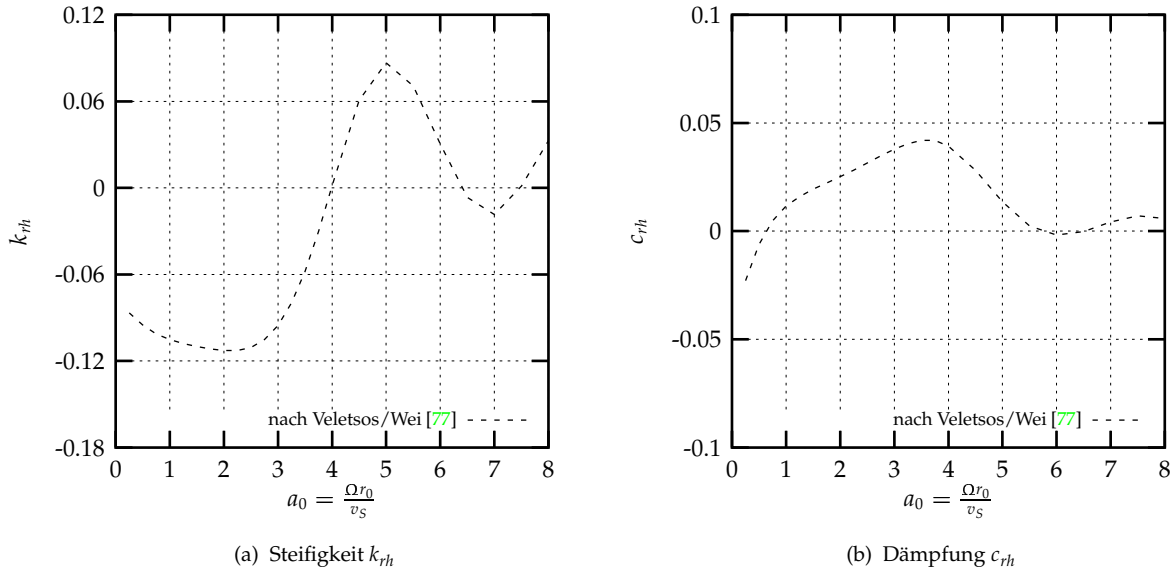


Abb. 3.10: Impedanzfunktion für das starre Fundament auf elastischem Halbraum für die Kopplung von horizontaler und Momentenanregung mit $\nu_s = 1/3$.

3.5 Flexibles Kreisfundament

Die Berechnung eines flexiblen Fundaments unter harmonischer Belastung kann ebenfalls nach dem Prinzip der Ringmethode durchgeführt werden. Sie muß hinsichtlich der Kompatibilität der Verformungen zwischen Fundament und Halbraum verändert werden. Es wird wieder angenommen, daß keine Schubspannungen zwischen Fundament und Halbraumoberfläche auftreten. Die Kopplung zwischen Horizontalverschiebung und Verdrehung wird nicht berücksichtigt. Das Kreisfundament wird als schubsteife Kreisplatte betrachtet. Trägheitskräfte, die aus der Durchbiegung der Platte resultieren, werden vernachlässigt.

3.5.1 Vertikale Anregung

Ringmethode

Die Setzung ist beim flexiblen Fundament nicht konstant über den Radius. Die Durchbiegung der Kreisplatte muß mit den Relativverschiebungen der Halbraumoberfläche im Fundamentbereich übereinstimmen. Als Relativverschiebungen der Halbraumoberfläche bzw. Durchbiegung der Kreisplatte wird die Differenz zwischen den Verschiebungen der Halbraumoberfläche bzw. Kreisplatte am Fundamentrand und im Fundamentinneren bezeichnet. Zur Bestimmung der dynamischen Sohlspannungsverteilung bei Vernachlässigung der Trägheitskräfte der Platte ist die Kenntnis der Plattendurchbiegungen unter statischen Ringlasten (Sohlspannungen) und der äußeren, als statisch anzusehenden Last notwendig. Aus Markus [45] können die erforderlichen Formeln entnommen werden. In der Tab. 3.1 sind sie für eingespannte und gelenkige Plattenränder aufgeführt. Die Durchbiegung der Platte an der Stelle $\zeta_l = \frac{2l-1}{2L}$ infolge einer Ringlast mit den Radien r_k und r_{k-1} kann damit in der Form von Glg. 3.25 angegeben werden. Die Durchbiegung

der Platte ist positiv in z-Richtung (s. Abb. 3.3).

$$w_{k,l} = -\frac{pr_0^4}{K_F} q_k f_{k,l} \quad (3.25)$$

Die Durchbiegung an der Stelle $\zeta_l = \frac{2l-1}{2L}$ infolge aller Ringlasten und der äußeren Last ergibt sich aus der entsprechenden Summation:

$$w_l = \frac{pr_0^4}{K_F} \left(g_l - \sum_{k=1}^L q_k f_{k,l} \right) \quad (3.26)$$

Die Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten q_k nehmen gegenüber Glg. 3.10 die folgende Form an:

$$\sum_{k=1}^L q_k \left(c_{k,l} - c_{k,L} + \frac{1}{\delta} f_{k,l} \right) = \frac{1}{\delta} g_l \quad l = 1..(L-1) \quad (3.27)$$

Mit dem Parameter $\delta = \frac{K_F}{G_S r_0^3}$ wird die bezogene Steifigkeit der Plattengründung bezeichnet. Unter Verwendung der Gleichgewichtsbedingung (Glg. 3.11) stehen L Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten q_k , $k = 1..L$ zur Verfügung.

Impedanzfunktion

Die vertikalen Verschiebungen sind nicht konstant über die Fundamentfläche. Die Angabe einer Impedanzfunktion ist deshalb nur für bestimmte Punkte der Platte möglich. Oftmals werden die Lasten über Wände am Plattenrand eingeleitet und eine Ermittlung der Impedanzfunktion ist für die Punkte unter diesen Wänden erforderlich. Hier werden zur Bestimmung der Werte von k_v

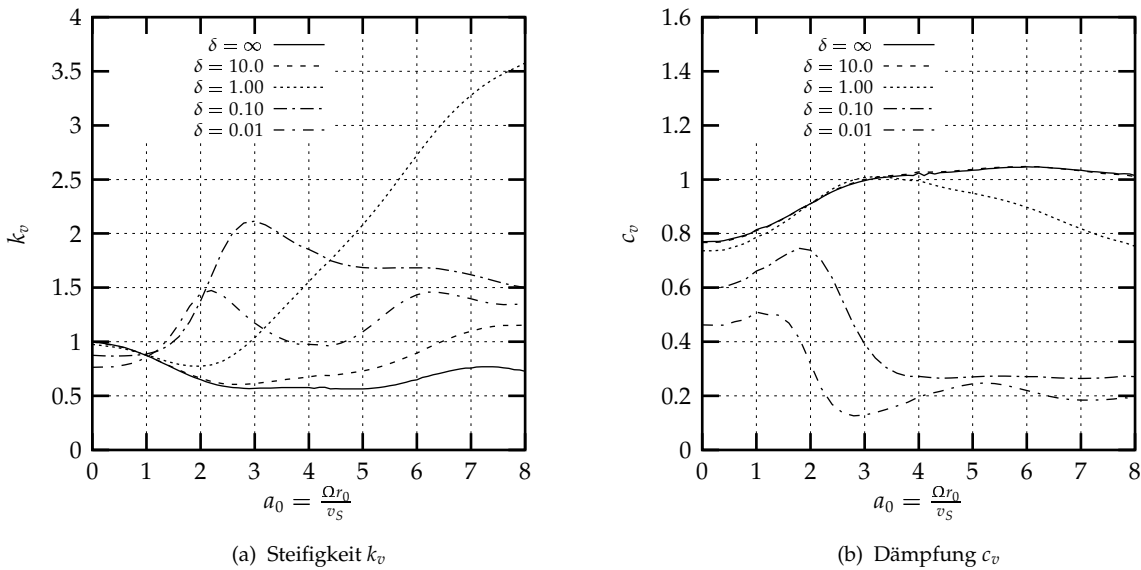


Abb. 3.11: Impedanzfunktion für die Kreisplatte unter axialsymmetrischer harmonischer Randlast auf dem linear-elastischen Halbraum mit $\nu_S = 1/3$ bei gelenkigen Plattenrändern.

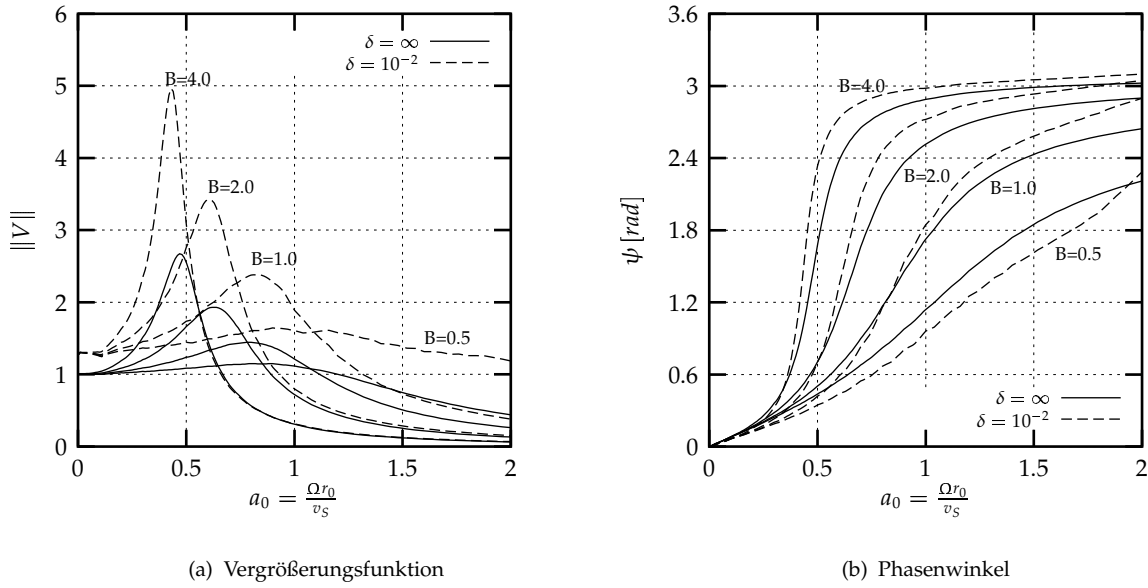


Abb. 3.12: Kreisplatte mit Masse unter axialsymmetrischer harmonischer Randlast auf dem linear-elastischen Halbraum mit $\nu_s = 1/3$.

und c_v die Verschiebungen des Fundamentrandes bei $\zeta_L = \frac{2L-1}{2L}$ zugrundegelegt. Die Ermittlung von k_v und c_v erfolgt unter Verwendung von Glg. 3.26 und 3.30.

$$k_v = \Re \left(\frac{\pi(1-\nu_s)}{4 \sum_{k=1}^L q_k c_{k,L}} \right) \quad c_v = \Im \left(\frac{\pi(1-\nu_s)}{4 a_0 \sum_{k=1}^L q_k c_{k,L}} \right) \quad (3.28)$$

In der Abb. 3.11 sind die Koeffizienten k_v und c_v für $\nu_s = 1/3$, $0 \leq a_0 \leq 8.0$ und verschiedene δ -Werte bei gelenkigen Plattenrändern angegeben. Als Querdehnzahl der Platte wurde $\nu_F = 0.21$ gewählt, um Vergleiche mit anderen Autoren [39] zu ermöglichen. Die äußere Last greift dabei ausschließlich an den Plattenrändern als harmonische Ringlast mit der Frequenz a_0 an. Innerhalb der Platte wirkt keine äußere Last. Ein Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren (z.B. Liou und Huang [39]) zeigt, daß eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse vorliegt.

Fundament mit Masse

Wird die Masse des Fundaments M_F berücksichtigt, so nimmt die Glg. 3.12 bei harmonischer Anregung die folgende Form an:

$$-\Omega^2 M_F w e^{i\Omega t} + (ic_v a_0 + k_v) K_v w e^{i\Omega t} = P e^{i\Omega t} \quad (3.29)$$

Die Lösung lautet (s.a. Lysmer [41]):

$$w = \frac{P}{K_v} V \quad (3.30)$$

mit:

$$V = \frac{1}{(k_v - B a_0^2) + ic_v a_0} \quad B = \frac{1-\nu_s}{4} \frac{M_F}{\rho_s r_0^3}$$

Der Phasenwinkel der Schwingung beträgt:

$$\psi = \arctan \left(\frac{-c_v a_0}{k_v - B a_0^2} \right) \quad (3.31)$$

In der Abb. 3.12 sind die Vergrößerungsfunktion und die Phasenwinkel für ein starres Fundament und ein Fundament mit der relativen Steifigkeit $\delta = 10^{-2}$ dargestellt. Der Fundamentrand ist frei verdrehbar. Die harmonische Belastung des flexiblen Fundaments wurde als axialsymmetrische Ringlast am Fundamentrand aufgebracht. Die Verringerung der Steifigkeit des Fundaments führt zu einer Verkleinerung der Resonanzfrequenz und zu einer Abnahme der Abstrahlungsdämpfung und damit zu größeren Amplituden der Fundamentverschiebungen.

3.5.2 Anregung durch ein Moment

Die Durchbiegungen der Kreisplatte müssen bei antimetrischer Belastung ebenfalls mit den Relativverschiebungen der Halbraumoberfläche im Fundamentbereich übereinstimmen. Für flexible Fundamente gilt jedoch nicht mehr die Beziehung zwischen Verschiebung und Verdrehung: $w = \phi r$, ($\tan \phi \approx \phi$) wie bei der starren Gründung.

Ringmethode

Die Durchbiegungen der Kreisplatte infolge einer linearen antimetrischen Ring- und Flächenlast können der Tab. 3.2 entnommen werden (s.a. Markus [45]). Die Durchbiegung an der Stelle $\zeta_l = \frac{2l-1}{2L}$ infolge aller Ringlasten (Sohlspannungen) und der äußeren Last kann in der folgenden Form dargestellt werden:

$$w_l = \frac{MMr_0}{K_F} \left(g_l - \sum_{k=1}^L q_k f_{k,l} \right) \quad (3.32)$$

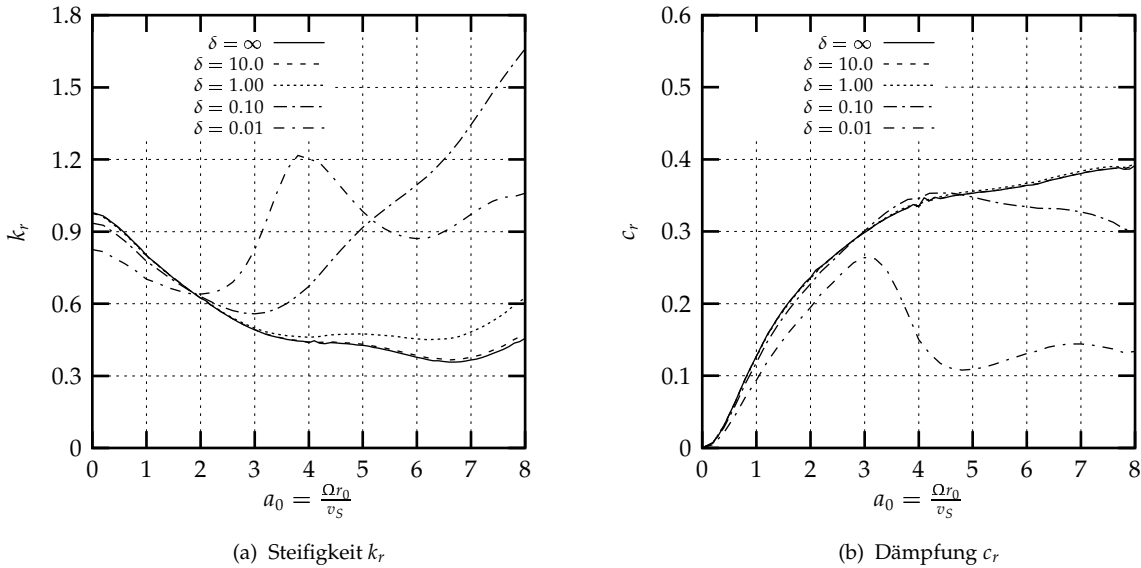


Abb. 3.13: Impedanzfunktion für die Kreisplatte unter antimetrischer harmonischer Randlast auf dem linear-elastischen Halbraum mit $v_s = 1/3$ bei gelenkigen Plattenrändern.

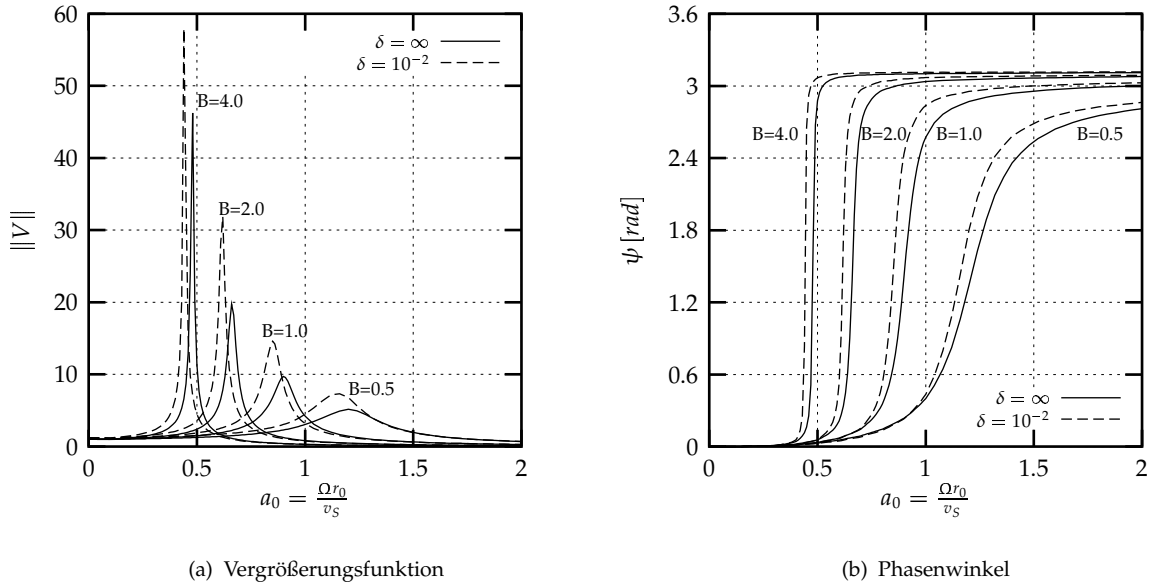


Abb. 3.14: Kreisplatte mit Masse unter antimetrischer harmonischer Randlast auf dem linear-elastischen Halbraum mit $\nu = 1/3$.

Zur Bestimmung der Koeffizienten q_k ist das folgende Gleichungssystem zu verwenden:

$$\sum_{k=1}^L q_k \left(c_{k,l} - \frac{2l-1}{2L-1} c_{k,L} + \frac{1}{\delta} f_{k,l} \right) = \frac{1}{\delta} g_l \quad l = 1..(L-1) \quad (3.33)$$

Mit der Momentengleichgewichtsbedingung stehen L Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten q_k , $k = 1..L$ zur Verfügung.

Impedanzfunktion

Zur Bestimmung der Impedanzfunktion werden wieder die Verschiebungen an den Plattenrändern zugrunde gelegt. Näherungsweise wird dabei die Verschiebung in der Mitte des äußeren Rings bei $\zeta_L = \frac{2L-1}{2L}$ verwendet. Die Werte von k_r und c_r lassen sich mit der Glg. 3.34 ermitteln. In der Abb. 3.13 sind die Koeffizienten k_r und c_r der Impedanzfunktion für $\nu_s = 1/3$, $0 \leq a_0 \leq 8.0$ und verschiedene δ -Werte bei gelenkigen Plattenrändern angegeben.

$$k_r = \Re \left[\frac{3(1-\nu_s)}{8} \frac{2L-1}{2L} \frac{1}{\sum_{k=1}^L q_k c_{k,L}} \right] \quad c_r = \Im \left[\frac{3(1-\nu_s)}{8} \frac{2L-1}{2L} \frac{1}{a_0 \sum_{k=1}^L q_k c_{k,L}} \right] \quad (3.34)$$

Es wurde für die Platte eine Querdehnzahl $\nu_F = 0.21$ verwendet. Als äußere Belastung greift eine harmonische antimetrische Ringlast am Plattenrand an. Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Liou und Huang [39] zeigt, daß die Methode gute Ergebnisse liefert.

Fundament mit Masse

Wird das Trägheitsmoment des Fundaments I_F berücksichtigt, so nimmt die Glg. 3.22 bei harmonischer Anregung die folgende Form an:

$$-\Omega I_F \phi e^{i\Omega t} + (ic_r a_0 + k_r) K_r \phi e^{i\Omega t} = M M e^{i\Omega t} \quad (3.35)$$

Die Lösung lautet:

$$\phi = \frac{MM}{K_r} V \quad (3.36)$$

mit:

$$V = \frac{1}{(k_r - Ba_0^2) + ic_r a_0} \quad B = \frac{3(1 - \nu_S)}{8} \frac{I_F}{\rho_S r_0^5}$$

Der Phasenwinkel der Schwingung beträgt:

$$\psi = \arctan \left(\frac{-c_r a_0}{k_r - Ba_0^2} \right) \quad (3.37)$$

In der Abb. 3.14 sind die Vergrößerungsfunktion und die Phasenwinkel für ein starres Fundament und ein Fundament mit der relativen Steifigkeit $\delta = 10^{-2}$ dargestellt. Der Fundamentrand ist frei verdrehbar. Die harmonische Belastung des flexiblen Fundaments wurde als antimetrische Ringlast am Fundamentrand aufgebracht. Die Verringerung der Steifigkeit des Fundaments führt zu einer Verkleinerung der Resonanzfrequenz und zu einer Abnahme der Abstrahlungsdämpfung.

Axialsymmetrische Flächenlast p : $w_l = \frac{pr_0^4}{K_F} g_l^2$	
für alle ζ_l	$g_l = \frac{1}{64} d_{L,l}^2$
Ringlast: $w_{k,l} = \frac{pr_0^4}{K_F} q_k f_{k,l}^2$	
$\zeta_l \geq \zeta_k$	$f_{k,l} = \frac{1}{32} \left(d_{k,l}^1 - d_{k-1,l}^1 \right)$
$\zeta_k \geq \zeta_l \geq \zeta_{k-1}$	$f_{k,l} = \frac{1}{64} \left(d_{k,l}^2 - 2d_{k-1,l}^1 \right)$
$\zeta_l \leq \zeta_{k-1}$	$f_{k,l} = \frac{1}{64} \left(d_{k,l}^2 - d_{k-1,l}^2 \right)$ bzw. $f_{1,l} = \frac{1}{64} d_{1,l}^2$
Hilfsgrößen für eingespannte Plattenränder	
$d_{k,l}^1 = \beta_k^2 \left[(2 + \beta_k^2) (1 - \zeta_l^2) + 2 (\beta_k^2 + 2\zeta_l^2) \ln \zeta_l \right]$	
$d_{k,l}^2 = \beta_k^2 \left[4 - \beta_k^2 (3 - 4 \ln \beta_k) \right] - 2\beta_k^2 (\beta_k^2 - 4 \ln \beta_k) \zeta_l$	
Hilfsgrößen für gelenkige Plattenränder	
$d_{k,l}^1 = \beta_k^2 \left[\frac{2(3+\nu_F) - (1-\nu_F)\beta_k^2}{1+\nu_F} (1 - \zeta_l^2) + 2(2\zeta_l^2 + \beta_k^2) \ln \zeta_l \right]$	
$d_{k,l}^2 = \left[4 - 5\beta_k^2 + 4(2 + \beta_k^2) \ln \beta_k \right] \beta_k^2 + \frac{2c_k^2}{1+\nu_F} (1 - \zeta_l^2) + \zeta_l^4$	
$c_k^1 = 4 - (1 - \nu_F)\beta_k^2 \quad c_k^2 = [c_k^1 - 4(1 + \nu_F) \ln \beta_k] \beta_k^2$	

Tab. 3.1: Zur Berechnung der Plattendurchbiegung bei axialsymmetrischer Belastung.

Antimetrische Flächenlast (mit dem Moment MM): $w_l = \frac{MMr_0}{K_F} g_l$	
für alle ζ_l	$g_l = \frac{1}{48\pi} d_{L,l}^2$
Ringlast: $w_{k,l} = \frac{MMr_0}{K_F} q_k f_{k,l}$	
$\zeta_l \geq \zeta_k$	$f_{k,l} = \frac{1}{4 \cdot 24} \frac{k^3}{L^3} \left(d_{k,l}^1 - d_{k-1,l}^1 \right)$
$\zeta_k \geq \zeta_l \geq \zeta_{k-1}$	$f_{k,l} = \frac{1}{4 \cdot 48} \frac{k^3}{L^3} \left(d_{k,l}^2 - 2d_{k-1,l}^1 \right)$
$\zeta_l \leq \zeta_{k-1}$	$f_{k,l} = \frac{1}{4 \cdot 48} \frac{k^3}{L^3} \left(d_{k,l}^2 - d_{k-1,l}^2 \right)$ bzw. $f_{1,l} = \frac{1}{4 \cdot 48} \frac{k^3}{L^3} d_{1,l}^2$
Hilfsgrößen eingespannte Plattenränder	
$d_{k,l}^1 = (2\beta_k^2 - 3)\zeta_l + (3 - \beta_k^2)\zeta_l^3 - \frac{\beta_k^2}{\zeta_l} - 6\zeta_l \ln \zeta_l$	
$d_{k,l}^2 = \frac{\zeta_l^5}{\beta_k^4} + c_k^1 \zeta_l + 2c_k^2 \zeta_l^3$	
$c_k^1 = 2(2\beta_k^2 - 3) + 3(1 - 4 \ln \beta_k) \quad c_k^2 = 3 - \beta_k^2 - \frac{3}{\beta_k^2}$	
Hilfsgrößen gelenkige Plattenränder	
$d_{k,l}^1 = (1 + \nu_F)(2\beta_k^2 - 3)\zeta_l + [(1 - \nu_F)\beta_k^2 + 3(1 + \nu_F)] \zeta_l^3 - (3 + \nu_F) \left(\frac{\beta_k^2}{\zeta_l} + 6\zeta_l \ln \zeta_l \right)$	
$d_{k,l}^2 = \frac{3+\nu_F}{\beta_k^4} \zeta_l^5 + c_k^1 \zeta_l + 2c_k^2 \zeta_l^3$	
$c_k^1 = 2(1 + \nu_F)(2\beta_k^2 - 3) + 3(3 + \nu_F)(1 - 4 \ln \beta_k) \quad c_k^2 = (1 - \nu_F)\beta_k^2 + 3(1 + \nu_F) - 3\frac{(3+\nu_F)}{\beta_k^2}$	
weitere Hilfsgrößen	
$\zeta_l = \frac{2l-1}{2L}; \beta_k = \frac{k}{L}; K_F = \frac{E_F d_F^3}{12(1-\nu_F^2)}$	

Tab. 3.2: Zur Berechnung der Plattendurchbiegung bei antimetrischer Belastung.

3.6 Impedanzfunktionen für flexible Behältergründungen

Die Behälter-Untergrund-Interaktion bei vertikaler Anregung wird durch die Flexibilität der Fundamentplatte kaum beeinflusst. Das konnte mit FE-Berechnungen nachgewiesen werden (s.a. Kapitel 4). Dagegen treten bei horizontaler Anregung Änderungen der dynamischen Eigenschaften des Gesamtsystems von Behälter und Untergrund auf. Die Impedanzfunktionen für die horizontale Bewegung und die Kopplung von Horizontal- und Kippbewegung des Fundaments werden durch die Fundamentflexibilität nur geringfügig verändert. Dagegen ist die Impedanzfunktion, die den Zusammenhang zwischen Kippbewegung und Momentenanregung beschreibt, von der Steifigkeit der Gründung abhängig. Es werden deshalb für die Behälter-Untergrund-Interaktion diese Impedanzfunktionen ermittelt.

Zur Bestimmung von Impedanzfunktionen für die Berechnung der Behälter-Untergrund-Interaktion sind Besonderheiten hinsichtlich der Lastverteilung auf den Behälterboden und der Behälterkonstruktion zu beachten.

Unter horizontaler Anregung treten Umsturzmomente infolge der antimetrischen Druckverteilung auf die Behälterwand MM_W und den Behälterboden MM_B auf. Das Umsturzmoment MM_W ruft eine vertikale antimetrische Ringkraft am Wandfuß hervor. Das Moment MM_B wird durch eine antimetrische vertikale Flächenlast auf dem Behälterboden erzeugt. Für die weitere Rechnung wird vorerst näherungsweise eine lineare Verteilung des antimetrischen Drucks am Behälterboden nach Glg. 3.38 angenommen (s.a. Abb. 3.15).

$$p(\zeta, \varphi) = p \zeta \cos \varphi \quad (3.38)$$

Das Verhältnis von Bodenmoment zu Wandmoment $\varepsilon = \frac{MM_B}{MM_W}$ ist abhängig von der Schlankheit des Behälters α und den konkreten Anregungsbedingungen. Für die Druckverteilungen infolge Starrkörperbewegung, Behälterschwingung und Schwappschwingung im ersten Mode für eine konstante Wandstärke $R/d = 1000$ ergeben sich die in Abb. 3.16 angegebenen ε -Werte. Die Ersatzgrößen ändern sich mit dem Wanddickenverhältnis $\eta = R/d$ nur geringfügig. Durch den impulsiven Druck werden im Vergleich zur Schwappschwingung i.a. größere Umsturzmomente erzeugt. Das resultiert aus der großen Periode der Schwappschwingung (für übliche Behälterabmessungen: $T > 4s$). Die bei Erdbeben auftretenden Beschleunigungen sind für diese Perioden sehr klein. Die Momentenverhältnisse ε bei der Behälterschwingung und der Starrkörperverschiebung unterscheiden sich nur geringfügig. Für die Bestimmung der Impedanzfunktion kann deshalb näherungsweise ein nur von der Schlankheit abhängiges Momentenverhältnis $\varepsilon = \frac{MM_B}{MM_W}$

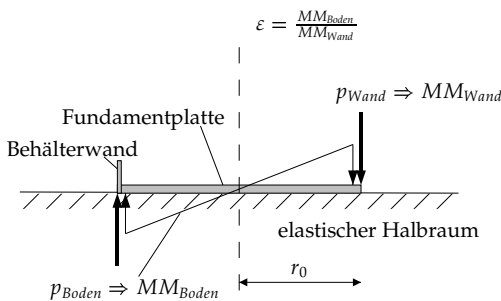


Abb. 3.15: Fundament-Untergrund-System mit den angreifenden vertikalen Kräften aus dem Behältertragwerk.

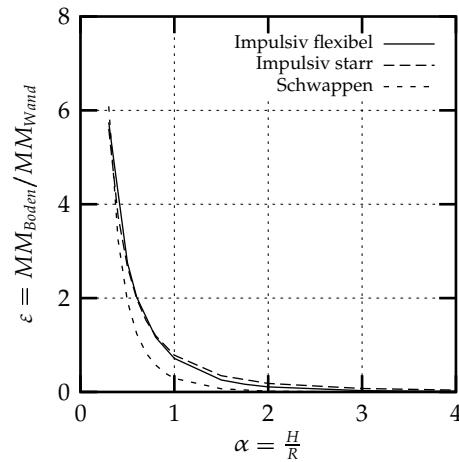


Abb. 3.16: Verhältnis von Boden- zu Wandmoment.

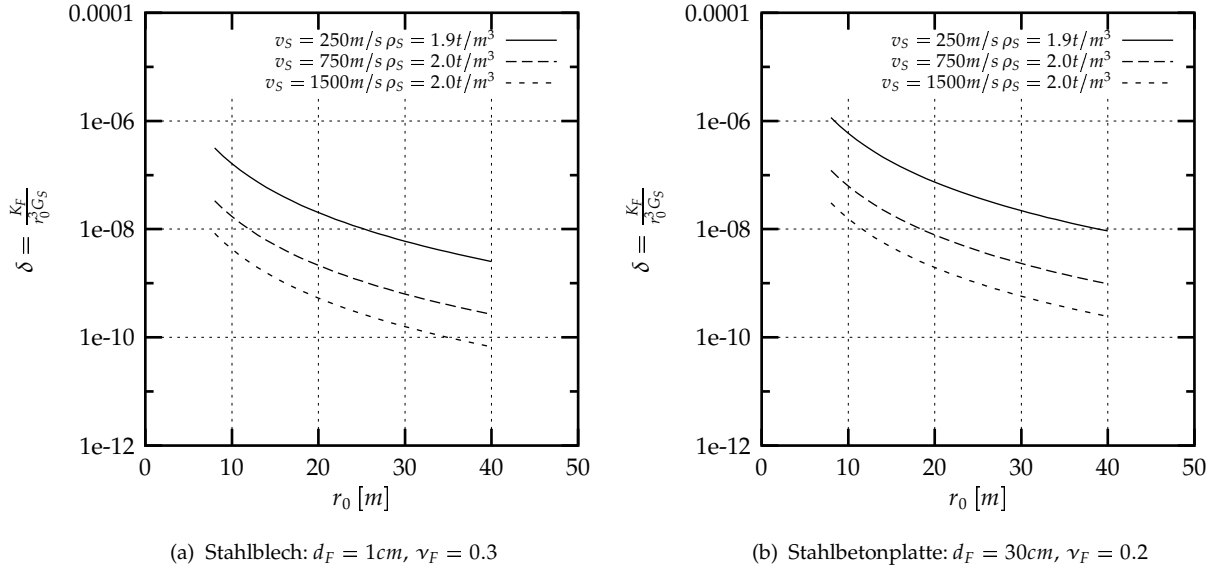


Abb. 3.17: Bezogene Fundamentsteifigkeiten.

angenommen werden.

Bei Stahlbehältern ist die Bodenplatte mit den Wänden biegesteif verbunden. In der Abb. 3.17 sind für Flüssigkeitsbehälter typische bezogene Fundamentsteifigkeiten δ angegeben.

Die Impedanzfunktion gibt die frequenzabhängigen Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften eines Feder-Dämpfer-Elements an. Damit wird das Kontinuum von Fundament und Boden durch ein diskretes Element beschrieben. Die Impedanzfunktion wird aus dem Verhältnis von angreifendem Moment und der Verdrehung eines für die Bauwerk-Untergrund-Interaktion maßgebenden Punktes am Fundament gebildet (Glg. 3.22). Für die Behälter-Untergrund-Interaktion wird die aus der vertikalen Verschiebung des Fundamentrandes gebildete Verdrehung des Fundaments als maßgebend angesehen. Aus ihr resultieren das Kippen des Behälters und damit die Momente und Horizontalkräfte oberhalb des Fundaments. Es wird vorausgesetzt, daß sich die Druckverteilungen im Behälter nur unmaßgeblich durch die ungleichmäßige Setzung des Fundaments über seinen Radius ändern.

Besselfunktionsförmige Druckverteilung am Behälterboden

Die Annahme einer linearen Druckverteilung über den Behälterboden ist für gedrungene Behälter ($\alpha \leq 1.0$) nicht mehr zutreffend. Aus dem *Anhang, Tafel V* ist zu erkennen, daß sich die Drücke mit geringer werdender Schlankheit am Bodenrand konzentrieren. Dies entspricht der Entwicklung des Flüssigkeitspotentials in eine Fourier-Bessel-Reihe. Um den tatsächlichen Druck besser beschreiben zu können, wird eine Verteilung entsprechend des ersten Gliedes der Fourier-Reihe angenommen (Glg. 3.39).

$$p(\xi = 0, \zeta, \varphi) = p \frac{I_1\left(\frac{\mu_1}{\alpha} \zeta\right)}{I_1\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right)} \cos \varphi \quad (3.39)$$

In der Abb. 3.18 ist die angenommene Druckverteilung dargestellt. Dieser Druckverteilung entspricht ein Moment von $MM = pr_0^3 \pi \frac{\alpha}{\mu_1} \frac{I_2\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right)}{I_1\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right)}$. Die Durchbiegung der eingespannten Kreisplatte

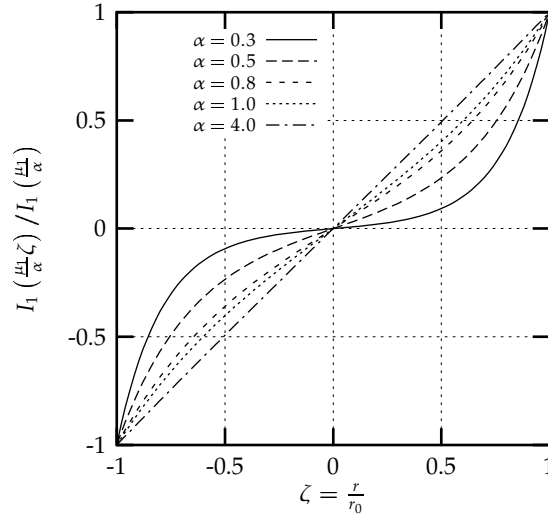


Abb. 3.18: Angenommene besselfunktionsförmige Druckverteilung am Behälterboden.

kann für diese Belastung mit der Glg. 3.40 ermittelt werden.

$$w = \frac{MMr_0}{K_F} \frac{\mu_1}{\pi\alpha I_2\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right)} \left[\frac{\alpha^4}{\mu_1^4} I_1\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\zeta\right) + c_1\zeta + c_2\zeta^3 \right] \cos\varphi \quad (3.40)$$

mit:

$$c_1 = -\frac{\alpha^4}{\mu_1^4} 2I_1\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right) + \frac{\alpha^3}{\mu_1^3} \frac{1}{2} I_0\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right) \quad c_2 = \frac{\alpha^4}{\mu_1^4} 2I_1\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right) - \frac{\alpha^3}{\mu_1^3} \frac{1}{2} I_0\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right)$$

Berechnungsergebnisse

Die Impedanzfunktionen sind ausschließlich für eingespannte Plattenränder bestimmt worden. Das ist für die Mehrzahl der Behälter in Stahlbauweise zutreffend. Für eine lineare Druckverteilung am Behälterboden wurden als bezogene Fundamentsteifigkeiten die Werte $\delta = 10^{-1}$, 10^{-2} , 10^{-4} und 10^{-6} gewählt. Die Impedanzfunktion für eine besselfunktionsförmige Druckverteilung wurde nur für die Fundamentsteifigkeit $\delta = 10^{-6}$ ermittelt. Für den linear-elastischen Halbraum wurde eine Querdehnzahl von $\nu_s = 1/3$ verwendet.

In dem für Flüssigkeitsbehälter maßgebenden Frequenzbereich von $0 \leq a_0 \leq 4$ treten Änderungen der Impedanzfunktion erst ab einer Fundamentsteifigkeit von $\delta \leq 10^{-4}$ auf. Das Fundament hat bei einer Steifigkeit von ca. $\delta \leq 10^{-8}$ nur noch einen geringen Einfluß auf die Verformungen der Halbraumoberfläche und damit auf die Impedanzfunktion. Für kleinere δ -Werte kann das Fundament als schlaff betrachtet werden.

Die besselfunktionsförmige Druckverteilung hat nur bei gedrunenen Behältern $\alpha \leq 0.8$ einen Einfluß auf die Impedanzfunktion. Die Steifigkeits- und Dämpfungswerte werden im maßgebenden Frequenzbereich $0 \leq a_0 \leq 4$ reduziert.

In den Abb. 3.19 bis 3.23 sind die berechneten Impedanzfunktionen dargestellt.

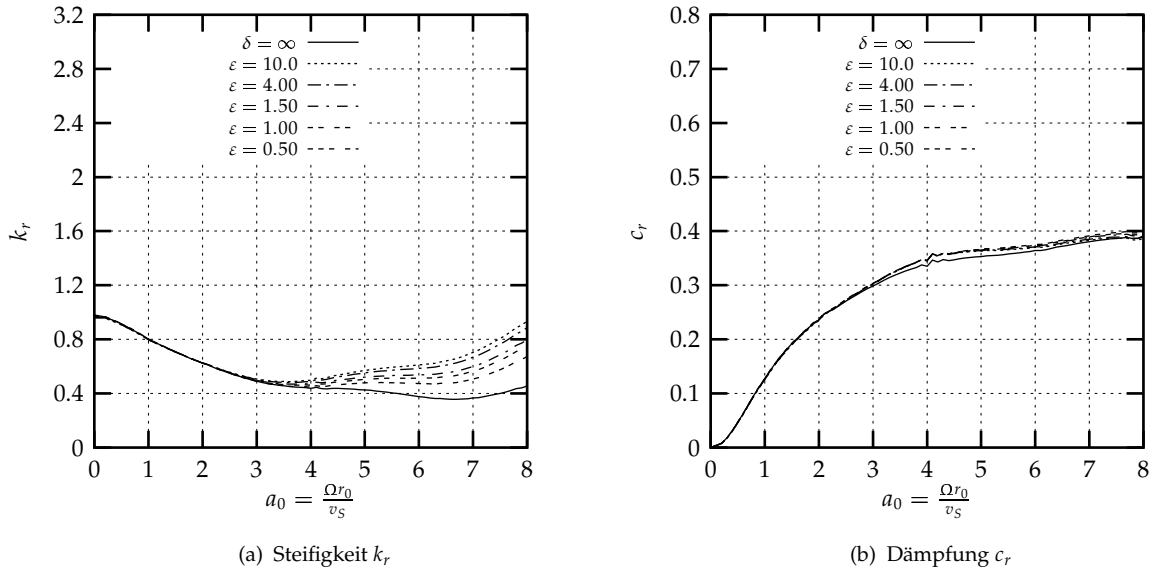


Abb. 3.19: Impedanzfunktion für eine lineare Druckverteilung am Behälterboden bei eingespannten Plattenrändern und $\delta = 10^{-1}$.

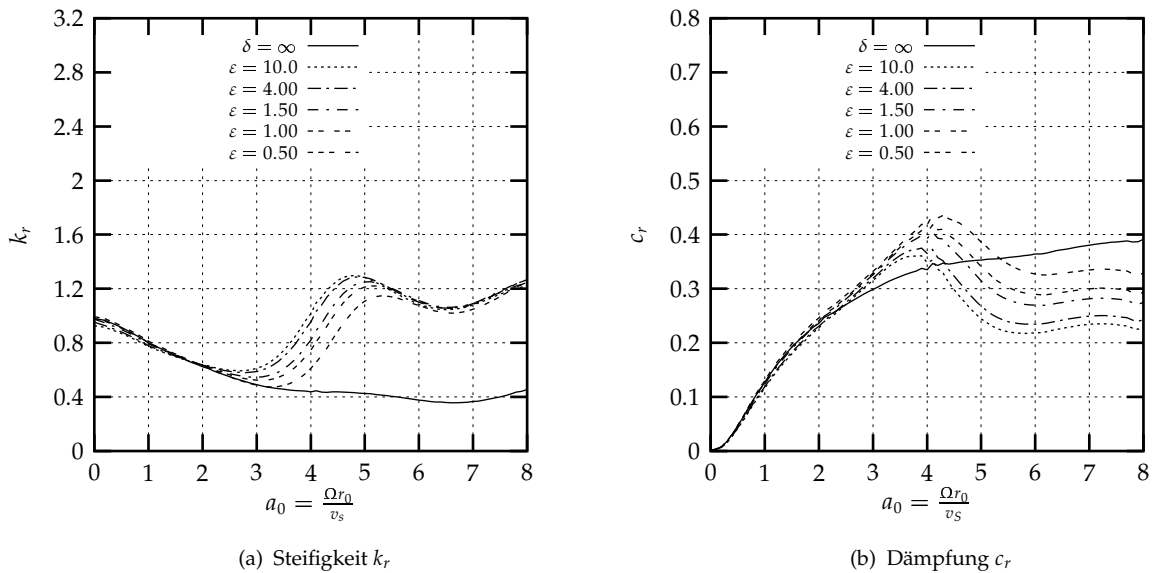


Abb. 3.20: Impedanzfunktion für eine lineare Druckverteilung am Behälterboden bei eingespannten Plattenrändern und $\delta = 10^{-2}$.

3.7 Zusammenfassung

Die Ringmethode von Lysmer [41] zur Berechnung des frequenzabhängigen Verhaltens von starren Kreisfundamenten auf dem elastischen Halbraum unter vertikaler Anregung wird auf flexible Fundamente und die Momentenanregung erweitert. Das Kontinuum "Fundament-Halbraum" kann damit durch Feder-Dämpfer-Elemente beschrieben werden. Die zugehörigen Impedanz-

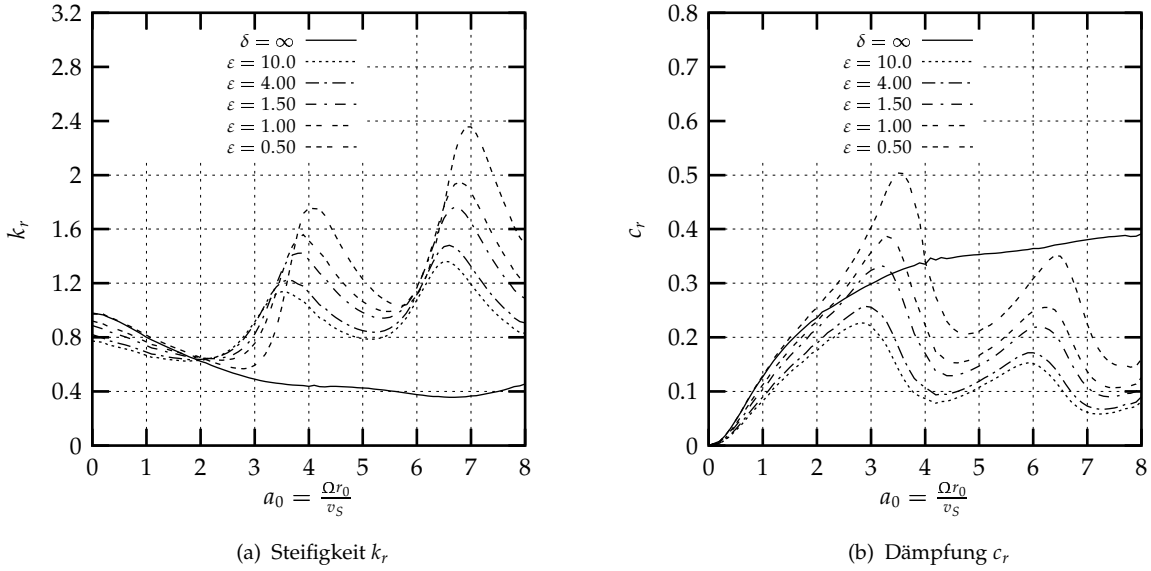


Abb. 3.21: Impedanzfunktion für eine lineare Druckverteilung am Behälterboden bei eingespannten Plattenrändern und $\delta = 10^{-4}$.

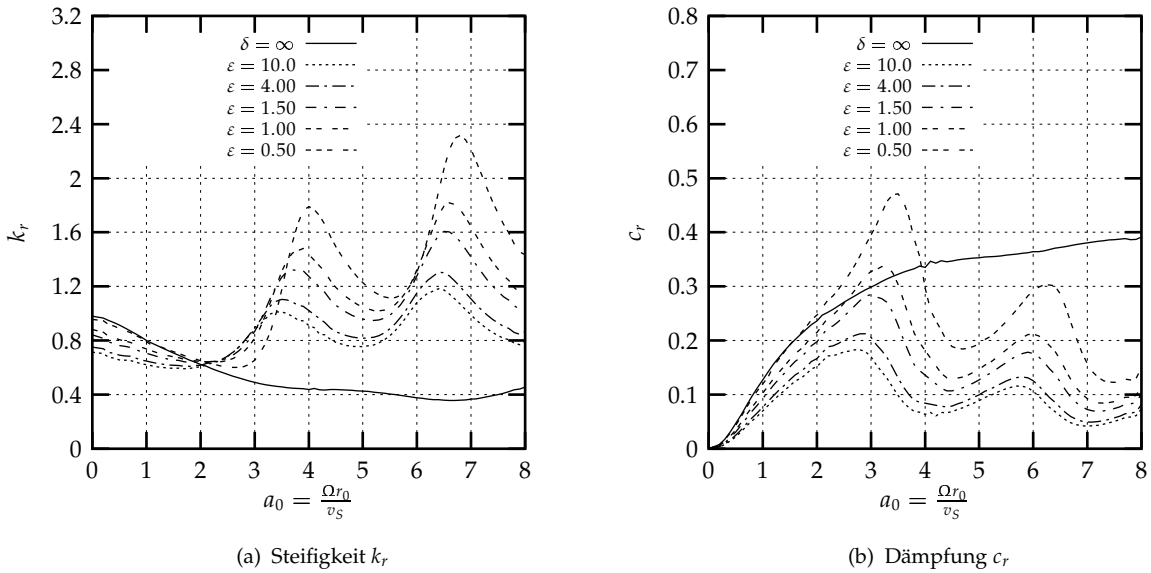


Abb. 3.22: Impedanzfunktion für eine lineare Druckverteilung am Behälterboden bei eingespannten Plattenrändern und $\delta = 10^{-6}$.

funktionen werden für das masselose Fundament ermittelt. Für das Fundament mit Masse werden die Vergrößerungsfunktion und der Phasengang bestimmt. Damit wird gezeigt, daß die Fundamentflexibilität zu einer Reduzierung der Resonanzfrequenz und zu einer Verringerung der Abstrahlungsdämpfung führt.

Unter Beachtung der bei Flüssigkeitsbehältern auftretenden Lastverteilung am Behälterboden werden Impedanzfunktionen für die flexible Kreisplatte auf dem linear-elastischen Halbraum

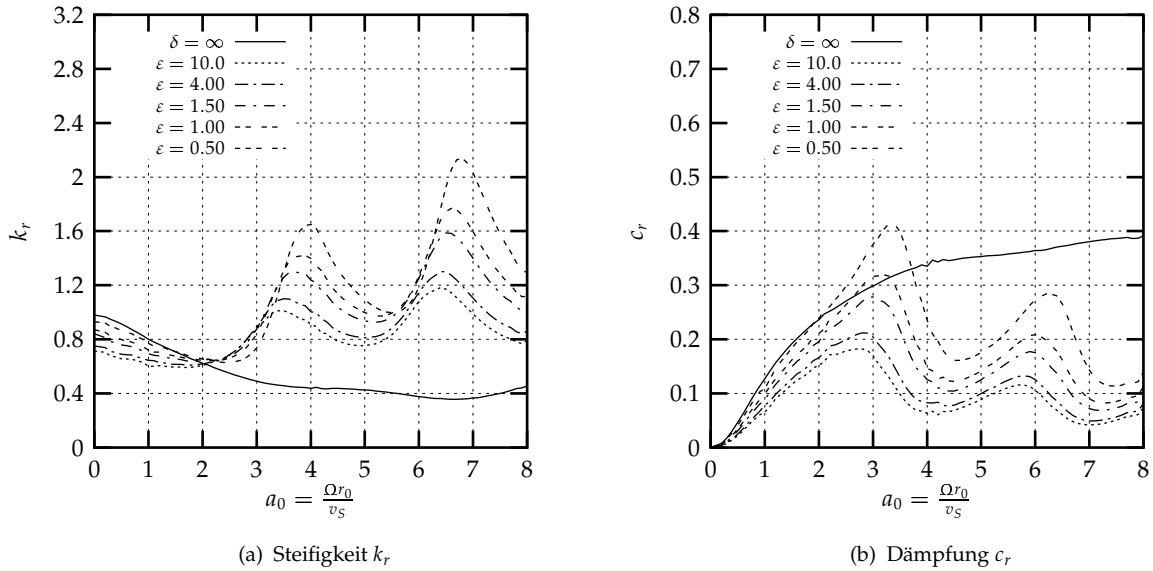


Abb. 3.23: Impedanzfunktion für eine besselfunktionsförmige Druckverteilung am Behälterboden bei eingespannten Plattenrändern und $\delta = 10^{-6}$.

unter antisymmetrischer Belastung ermittelt.

Die Impedanzfunktionen werden für typische Steifigkeiten von Behältergründungen berechnet. Sie unterscheiden sich zum Teil sehr von denen für starre Fundamente. Im überwiegenden Frequenzbereich treten kleinere Dämpfungskoeffizienten c_r auf. Bei flexiblen Fundamenten ($\delta \leq 10^{-4}$) werden die Steifigkeitswerte k_r bei kleinen Frequenzen ($a_0 \leq 2$) und einem großen Momentenverhältnis ($\varepsilon \geq 1.0$, schlanke Behälter) gegenüber dem starren Fundament reduziert. Bei höheren Frequenzen kann eine Vergrößerung der Gründungssteifigkeit auftreten.

Mit den Impedanzfunktionen ist eine Berechnung der Behälter-Untergrund-Interaktion auf Basis der Substrukturmethode möglich.

4 Gesamtsystem von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund

Entsprechend dem Berechnungsablauf der Substrukturmethode nach Tab. 1.2 erfolgt im dritten Schritt die Kopplung der Teilsysteme Behälter-Flüssigkeit und Fundament-Untergrund zum Gesamtsystem.

In *Abschnitt 4.1* werden die Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems für die vertikale und horizontale seismische Anregung im Frequenzbereich angegeben. Dafür werden die von Veletos und Tang [72, 74, 75] entwickelten Modelle verwendet und hinsichtlich der Kopplung von Horizontal- und Kippbewegung des Fundaments und der Berücksichtigung der Materialdämpfung der Teilsysteme Behälter, Flüssigkeit und Untergrund erweitert.

In *Abschnitt 4.2* werden die dynamischen Kenngrößen (Resonanzfrequenz, Dämpfung) des Gesamtsystems mit Ergebnissen aus Finite-Elemente-Berechnungen verglichen. Dabei wird unter Verwendung der Impedanzfunktionen aus *Kapitel 3* die Flexibilität der Gründung berücksichtigt. An einem konkreten Erdbebenzeitverlauf wird die Qualität der Ergebnisse des vorgeschlagenen mechanischen Modells zur Interaktion von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund demonstriert.

4.1 Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems

4.1.1 Bildung des Gesamtsystems nach der Substrukturmethode

Das Verhalten der Teilsysteme Behälter-Flüssigkeit und Fundament-Untergrund unter harmonischer Einwirkung wurde in den vorangegangenen *Kapiteln 2* und *3* behandelt. Die Teilsysteme konnten dabei durch diskrete Elemente (Einfreiheitsgradschwinger, Feder-Dämpfer-Elemente) beschrieben werden.

Die Kopplung der Teilsysteme erfolgt durch die auf das Fundament-Untergrund- und Behälter-Flüssigkeit-System wirkenden Interaktionskräfte. Diese Interaktionskräfte müssen miteinander im Gleichgewicht stehen. Bei vertikaler Anregung treten vertikale Kräfte und bei horizontaler Anregung Schubkräfte und Momente zwischen Fundament und Behälter auf. Durch die Interaktionskräfte entsteht zusätzlich zur Freifeldbewegung eine Interaktionsbewegung. Der Zusammenhang zwischen den Interaktionskräften und den Interaktionsbewegungen kann durch die in *Kapitel 3* angegebenen Impedanzfunktionen ausgedrückt werden. Aus den Bewegungsgleichungen des Teilsystems Behälter-Flüssigkeit und den Gleichgewichtsbedingungen an den Kontaktstellen können die Interaktionsbewegung und die Bewegung des Behälter-Flüssigkeit-Systems bestimmt werden.

4.1.2 Vertikale Anregung

In Tab. 4.1 sind die Massen angegeben, die bei vertikaler Anregung zu berücksichtigen sind. Daraus ergibt sich das in Abb. 4.1 dargestellte Gesamtsystem. Es besteht aus Einfreiheitsgradschwingern für das Behälter-Flüssigkeit-System (*Kapitel 2*), die auf Feder-Dämpfer-Elementen (*Kapitel 3*) gelagert sind. Die seismische Anregung erfolgt über diese Feder-Dämpfer-Elemente.

Behälter-Flüssigkeit-System

Die Steifigkeit und Dämpfung der Einfreiheitsgradschwinger in Abb. 4.1 berechnet sich mit $k_{DV,n} = \omega_{0,n}^2 M_{DV,n}$ und $c_{DV,n} = 2\omega_{0,n} M_{DV,n} \kappa_{0,n}$. Die Werte für $\omega_{0,n}$, $M_{DV,n}$ und $\kappa_{0,n}$ sind dem Kapitel 2 zu entnehmen. Die impulsive Masse M_{DV} wird durch die Relativbeschleunigung $w_{DV,n}^{rel}$ hervorgerufen (Veletsos und Tang [72]). Um die Absolutbeschleunigung $w_{DV,n}^{abs}$ verwenden zu können, sind von der starr mit dem Fundament verbundenen Masse $M_0 = M_L + M_F$ die Massen $M_{DV,n}$ aus der Interaktionsschwingung von Flüssigkeit und Behälter abzuziehen (Abb. 4.1). Die harmonische Fußpunktanregung erfolgt mit der Amplitude w_0 und der Frequenz Ω bzw. $\eta_{0,n} = \frac{\Omega}{\omega_{0,n}}$. Die Beschleunigung der Masse für den n-ten Mode der Interaktionsschwingung lautet damit:

$$\ddot{w}_{DV,n} = -\frac{\Omega^2}{1 + 2i\kappa_{0,n}\eta_{0,n} - \eta_{0,n}^2} w_0 e^{i\Omega t} = -\Omega^2 A_{DV,n} w_0 e^{i\Omega t} \quad (4.1)$$

Auf das Fundament wirken aus dem Teilsystem Behälter-Flüssigkeit die folgenden Kräfte:

$$\begin{aligned} \text{Interaktionsschwingung:} \quad F_{DV} &= \sum_{n=1}^N M_{DV,n} \ddot{w}_n^{abs} \\ \text{Starrkörperverschiebung:} \quad F_{BV} &= M_0 \ddot{w}_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Fundament-Untergrund-System

Die Kraft-Verschiebungs-Beziehung für das Fundament-Untergrund-System kann entsprechend Kapitel 3 durch die Glg. 4.3 angegeben werden. Eine innere Dämpfung des Untergrundes kann berücksichtigt werden, indem k_v mit dem Faktor $(1 + 2i\kappa_s)$ multipliziert wird und man damit einen komplexen Schubmodul erhält (hysteretische Dämpfung, s.a. Wolf [78]). Der Wert κ_s gibt die hysteretische Materialdämpfung des Untergrundes an.

$$F_v = K_v (k_v + a_0 c_v) (w_0 - w_g) \quad (4.3)$$

mit:

$$K_v = \frac{4G_s r_0}{1 - \nu_s}$$

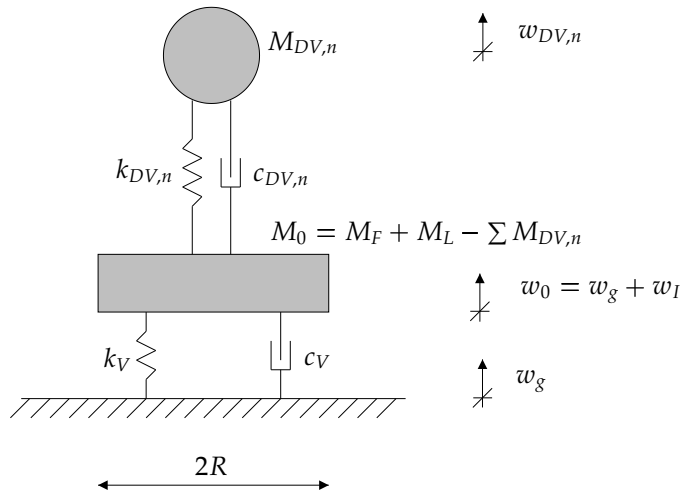


Abb. 4.1: Mechanisches System bei vertikaler Anregung.

Masse	Beschreibung
$M_{DV,n}$	aktivierte Masse infolge der gemeinsamen Schwingung von Schale und Flüssigkeit im n-ten Mode
$M_L = \pi R^2 H \rho_L + \pi R H d \rho$ M_F	Gesamtmasse der Flüssigkeit und des Behälters Fundamentmasse

Tab. 4.1: Aktivierte Massen bei vertikaler Anregung.

Gleichungen für das Gesamtsystem

Die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems ergibt sich aus dem Gleichgewicht der vertikalen Interaktionskräfte an der Kontaktstelle der Teilsysteme. Sie lautet:

$$\left[- \sum_{n=1}^N M_{DV,n} \Omega^2 A_{DV,n} - M_0 \Omega^2 + K_v (k_v + a_0 c_v) \right] w_0 = K_v (k_v + a_0 c_v) w_g \quad (4.4)$$

Aus Glg. 4.4 und 4.1 können die Übertragungsfunktionen für die Bewegungsgrößen der einzelnen Freiheitsgrade des gekoppelten Systems bestimmt werden. Bei transients Erregung ist die Ermittlung der Systemantwort durch Anwendung der Fourier-Transformation möglich. Wenn die dominanten Anregungsfrequenzen unterhalb der zweiten Eigenfrequenz des Behälters liegen, so ist es ausreichend, nur den ersten Mode der Interaktionsschwingung zu berücksichtigen (Veletsos und Tang [72]).

In den Abb. 4.2 und 4.3 sind die Amplitudenfunktionen für zwei Beispiele ($\alpha = 1.0$ und 2.0) dargestellt.

4.1.3 Horizontale Anregung

Unter horizontaler Anregung sind zur Erfassung der Behälter-Untergrund-Interaktion die in Tab. 4.2 angegebenen Massen zu berücksichtigen. Die Massen, die aus der Kippbewegung des Behälters entstehen, können durch die Massen infolge der horizontalen Bewegung ausgedrückt werden (Glg. 4.5). Diese Beziehungen lassen sich mit Hilfe des Satzes von Betti herleiten (Veletsos und Tang [74, 75]).

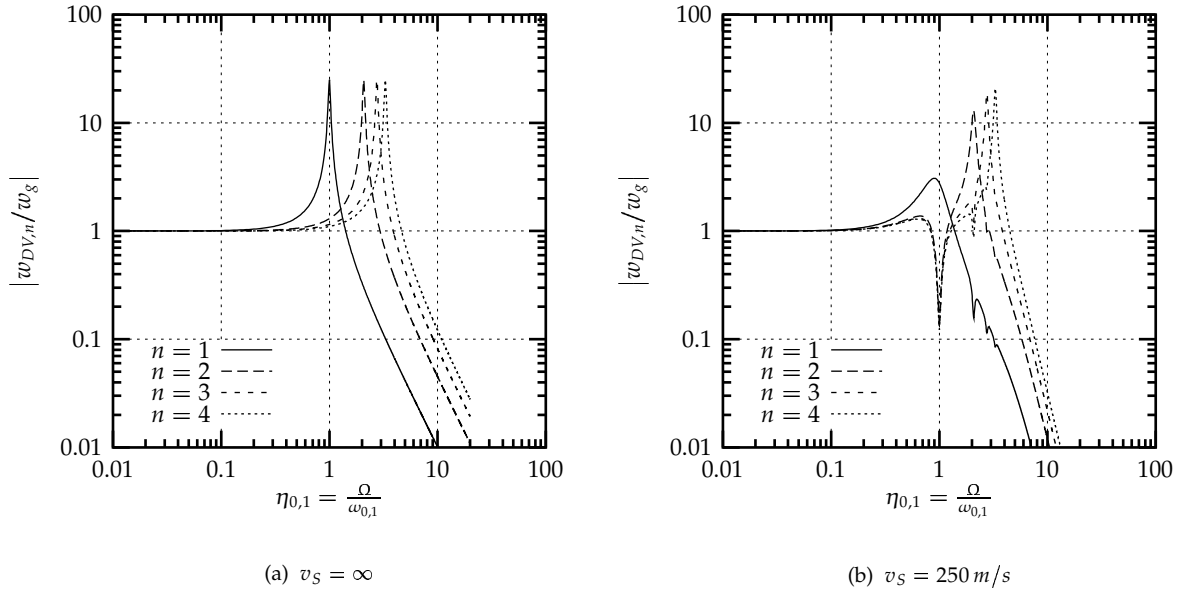
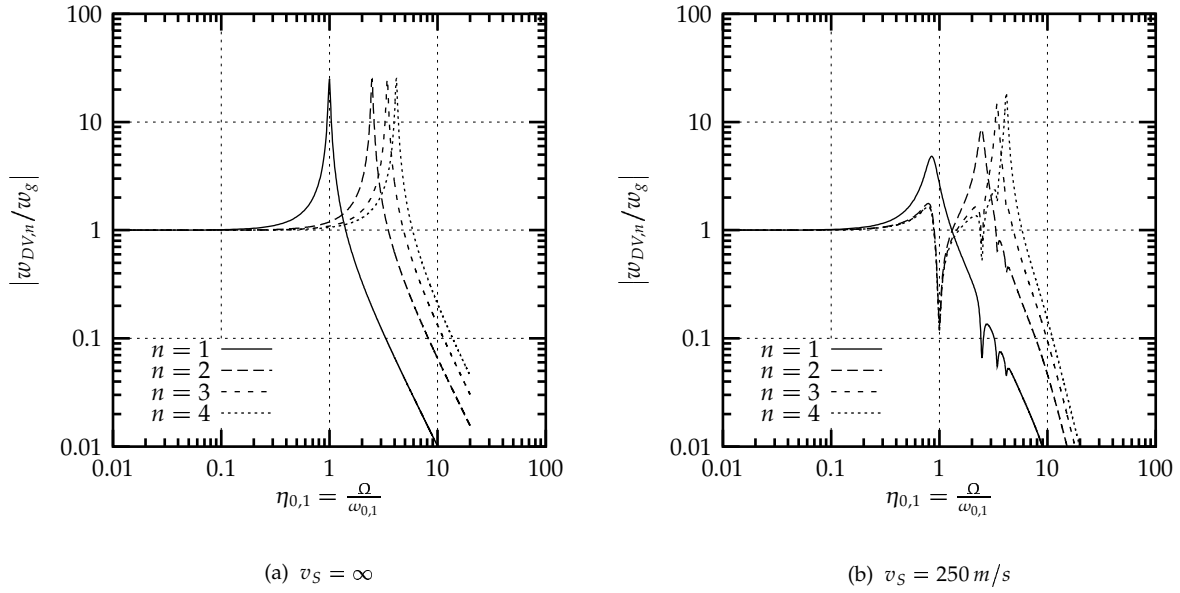
Damit ergeben sich für die Massen aus der Kippanregung die folgenden Beziehungen:

$$M_{SLR,n} = M_{SLH,n} H_{SLH,n} \quad M_{DR,n} = M_{DH,n} H_{DH,n} \quad (4.5)$$

Das mechanische Modell zur Berechnung der Behälter-Untergrund-Interaktion bei horizontaler Anregung ist in Abb. 4.4 dargestellt. Es besteht aus den Einfreiheitsgradschwingern als Ersatzsystem für die Interaktionsschwingung von Behälter und Flüssigkeit (Kapitel 2) und den Feder-Dämpfer-Elementen als Ersatzsystem für das Fundament-Untergrund-Kontinuum (Kapitel 3). Die Kopplung von Horizontal- und Kippbewegung des Fundaments (k_{rh} , c_{rh}) ist nicht angegeben. Die Anregung erfolgt über die horizontalen Feder-Dämpfer-Elemente.

Behälter-Flüssigkeit-System

Den voneinander unabhängigen Einfreiheitsgradschwingern ist eine Dämpfung von $c_n = 2M_n \omega_{1,n} \kappa_{1,n}$ und eine Steifigkeit $k_n = \omega_{1,n}^2 M_n$ zugeordnet. Die Werte für $\omega_{1,n}$, $\kappa_{1,n}$ und M_n sind Kapitel 2 zu entnehmen. Das Behälter-Flüssigkeit-System ist einer harmonischen horizontalen Fußpunktanregung mit der Amplitude u_0 bzw. einer Kippanregung mit der Amplitude ϕ_0 und der Frequenz

Abb. 4.2: Amplitudenfunktionen für Behälter mit $\alpha = 1.0$, $R/d = 1000$, $\kappa = 0.02$.Abb. 4.3: Amplitudenfunktionen für Behälter mit $\alpha = 2.0$, $R/d = 1000$, $\kappa = 0.02$.

Ω ausgesetzt. Daraus resultieren die in Tab. 4.3 angegebenen Beschleunigungen für die Massen der Schwapp- und Interaktionsschwingung.

Aus dem Behälter wirken auf das Fundament die in den Tab. 4.4 und 4.5 angegebenen Schubkräfte und Momente.

Fundament-Untergrund-System

Die Kraft-Verschiebungs- bzw. Moment-Verdrehungsbeziehungen für das Fundament-Untergrund-System können mit den Glg. 4.6 angegeben werden (s.a. Kapitel 3). Die Kenngrößen k_h , c_h , k_r , c_r und k_{rh} , c_{rh} sind ebenfalls dem Kapitel 3 zu entnehmen.

$$\begin{pmatrix} H \\ M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_h(k_h + a_0 c_h) & K_{rh}(k_{rh} + a_0 c_{rh}) \\ K_{hr}(k_{hr} + a_0 c_{hr}) & K_r(k_r + a_0 c_r) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 - u_g \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

mit:

$$K_h = \frac{8G_S r_0}{2 - \nu_S} \quad K_r = \frac{8G_S r_0^3}{3(1 - \nu_S)} \quad K_{rh} = K_{hr} = K_h r_0 = \frac{8G_S r_0^2}{2 - \nu_S}$$

Gleichungen für das Gesamtsystem

Die Bewegungsgleichungen für das Gesamtsystem ergeben sich aus dem Momentengleichgewicht und dem horizontalen Kräftegleichgewicht an der Kontaktstelle von Behälter und Fundament.

Masse	Beschreibung
$M_{SLH,n}$	Flüssigkeitsmasse infolge der Schwappschwingung der Flüssigkeit, horizontale Anregung
$M_{DH,n}$	Masse infolge der Interaktionsschwingung von Schale und Flüssigkeit, horizontale Anregung
$M_{SLR,n}$	Flüssigkeitsmasse infolge der Schwappschwingung der Flüssigkeit, Kippanregung
$M_{DR,n}, I_B$	Masse, Trägheitsmoment infolge der Interaktionsschwingung von Schale und Flüssigkeit bei Kippanregung
M_F, I_F	Masse, Trägheitsmoment Fundament

Tab. 4.2: Aktivierte Massen bei horizontaler Anregung.

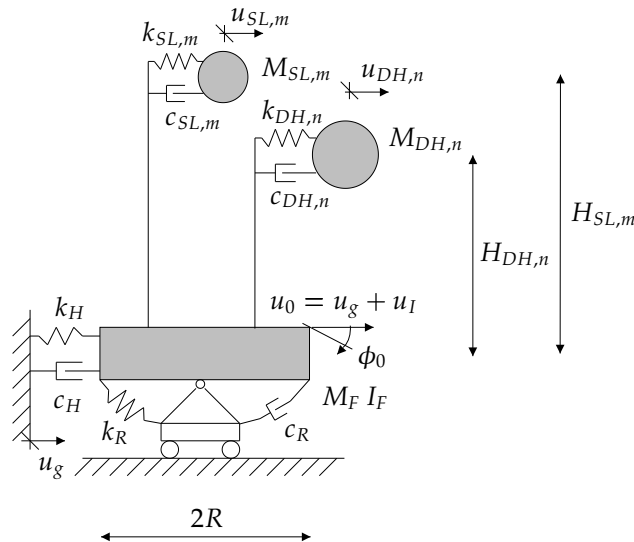


Abb. 4.4: Mechanisches System bei horizontaler Anregung.

Anregung	Masse
Horizontal $u_0 e^{i\Omega t}$	Schwappschwingung $M_{SLH,n}$ $\ddot{u}_{SLH,n}^{abs} = -\Omega^2 \frac{1}{1-2i\kappa_{SLH,n}\eta_{SLH,n}+\eta_{SLH,n}^2} u_0 e^{i\Omega_{SLH,n}t}$ $= -\Omega^2 A_{SLH,n} u_0 e^{i\Omega_{SLH,n}t}$
	Interaktionsschwingung $M_{DH,n}$ $\ddot{u}_{DH,n}^{abs} = -\Omega^2 \frac{1}{1-2i\kappa_{DH,n}\eta_{DH,n}+\eta_{DH,n}^2} u_0 e^{i\Omega_{DH,n}t}$ $= -\Omega^2 A_{DH,n} u_0 e^{i\Omega_{DH,n}t}$
Kippen $\phi_0 e^{i\Omega t}$	Schwappschwingung $M_{SLR,n}$ $\ddot{u}_{SLR,n}^{abs} = -\Omega^2 \frac{1}{1-2i\kappa_{SLH,n}\eta_{SLH,n}+\eta_{SLH,n}^2} H_{SLH,n} \phi_0 e^{i\Omega_{SLH,n}t}$ $= -\Omega^2 A_{SLH,n} H_{SLH,n} \phi_0 e^{i\Omega_{SLH,n}t}$
	Interaktionsschwingung $M_{DR,n}$ $\ddot{u}_{DR,n}^{abs} = -\Omega^2 \frac{1}{1-2i\kappa_{DH,n}\eta_{DH,n}+\eta_{DH,n}^2} H_{DH,n} \phi_0 e^{i\Omega_{DH,n}t}$ $= -\Omega^2 A_{DH,n} H_{DH,n} \phi_0 e^{i\Omega_{DH,n}t}$

Tab. 4.3: Beschleunigung der flexibel mit dem Fundament verbundenen Massen.

ment. Dies führt zu der Glg. 4.7:

$$\begin{bmatrix} K_h(k_h + a_0 c_h) - \Omega^2 M_1 & K_h r_0(k_{rh} + a_0 c_{rh}) - \Omega^2 M_2 \\ K_h r_0(k_{rh} + a_0 c_{rh}) - \Omega^2 M_2 & K_r(k_r + a_0 c_r) - \Omega^2 M_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_h(k_h + a_0 c_h) \\ K_h r_0(k_{rh} + a_0 c_{rh}) \end{pmatrix} u_g \quad (4.7)$$

mit:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_F + \sum_{n=1}^{N1} M_{SLH,n} A_{SLH,n} + \sum_{n=1}^{N2} M_{DH,n} A_{DH,n} \\ M_2 &= \sum_{n=1}^{N1} M_{SLH,n} A_{SLH,n} H_{SLH,n} + \sum_{n=1}^{N2} M_{DH,n} A_{DH,n} H_{DH,n} \\ M_3 &= I_F + I_B + \sum_{n=1}^{N1} M_{SLH,n} A_{SLH,n} H_{SLH,n}^2 + \sum_{n=1}^{N2} M_{DH,n} A_{DH,n} H_{DH,n}^2 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Glg. 4.7 und den Angaben der Tab. 4.3 können die Übertragungsfunktionen für die Bewegungsgrößen der einzelnen Freiheitsgrade bestimmt werden. Bei transienter Einwirkung

Anregung	Masse	
Horizontal $u_0 e^{i\Omega t}$	Schwappschwingung $Q_{SLH} = \sum_{n=1}^{N1} M_{SLH,n} \ddot{u}_{SLH,n}^{abs}$	Interaktionsschwingung $Q_{DH} = \sum_{n=1}^{N2} M_{DH,n} \ddot{u}_{DH,n}^{abs}$
	Fundament $Q_F = M_F \ddot{u}_0$	
Kippen $\phi_0 e^{i\Omega t}$	Schwappschwingung $Q_{SLR} = \sum_{n=1}^{N1} M_{SLH,n} \ddot{u}_{SLR,n}^{abs}$	Interaktionsschwingung $Q_{DR} = \sum_{n=1}^{N2} M_{DH,n} \ddot{u}_{DR,n}^{abs}$

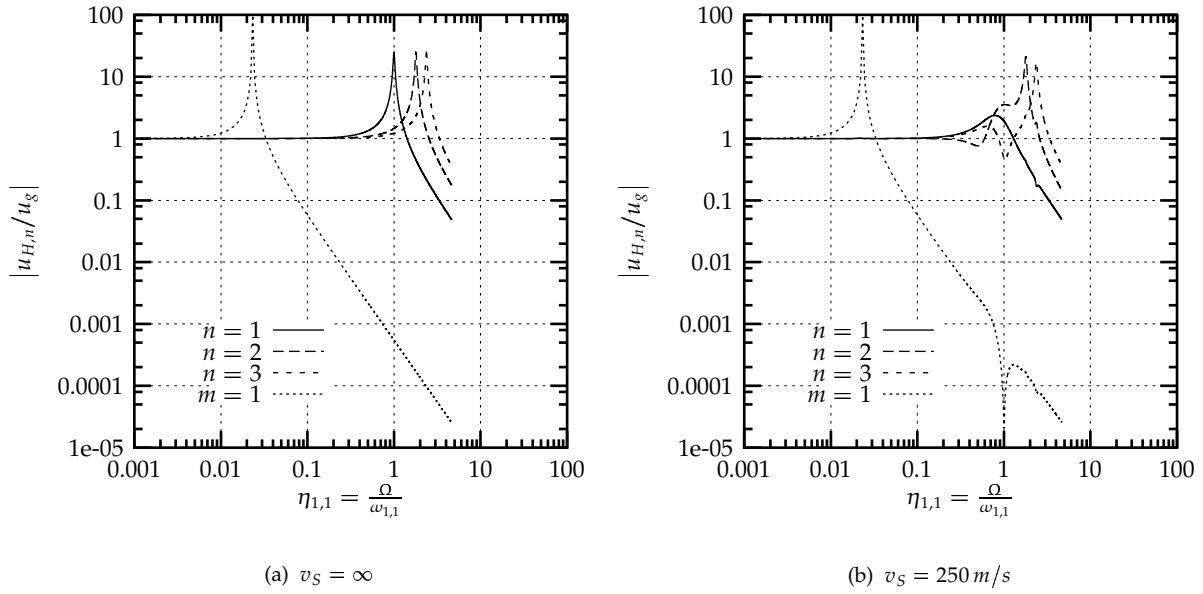
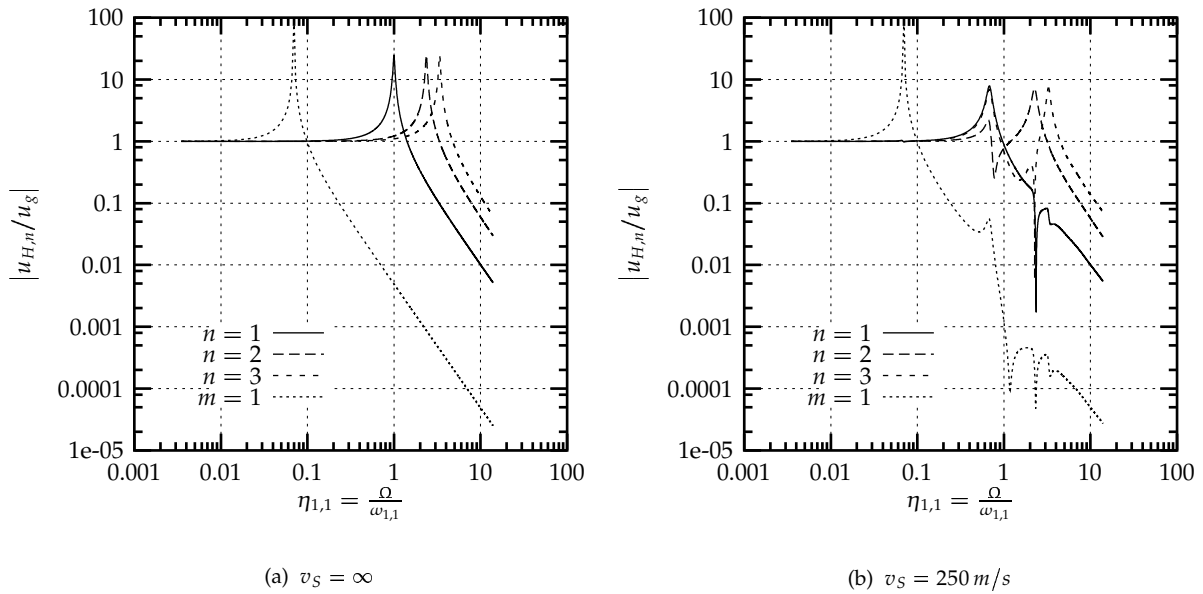
Tab. 4.4: Schubkräfte aus dem Behälter auf das Fundament.

Anregung	Masse	
Horizontal $u_0 e^{i\Omega t}$	Schwappschwingung $MM_{SLH} = \sum_{n=1}^{N1} M_{SLH,n} H_{SLH,n} \ddot{u}_{SLH,n}^{abs}$	
	Interaktionsschwingung $MM_{DH} = \sum_{n=1}^{N2} M_{DH,n} H_{DH,n} \ddot{u}_{DH,n}^{abs}$	
Kippen $\phi_0 e^{i\Omega t}$	Schwappschwingung $MM_{SLR} = \sum_{n=1}^{N1} M_{SLH,n} H_{SLH,n} \ddot{u}_{SLR,n}^{abs}$	
	Interaktionsschwingung $MM_{DH} = \sum_{n=1}^{N2} M_{DH,n} H_{DH,n} \ddot{u}_{DR,n}^{abs}$	Moment aus Verdrehung des Behälterbodens $MM_I = (I_B + I_F) \ddot{\psi}_0$

Tab. 4.5: Momente aus dem Behälter auf das Fundament.

ist damit eine Berechnung der Systemantwort durch Anwendung der Fourier-Transformation möglich.

In den Abb. 4.5 und 4.6 sind die Amplitudenfunktionen für zwei Beispiele ($\alpha = 0.5$ und 2.0) dargestellt.

Abb. 4.5: Amplitudenfunktion für Behälter mit $\alpha = 0.5$, $R/d = 1000$, $\kappa = 0.02$, $\kappa_{SL} = 0.005$ Abb. 4.6: Amplitudenfunktion für Behälter mit $\alpha = 2.0$, $R/d = 1000$, $\kappa = 0.02$, $\kappa_{SL} = 0.005$

4.2 Vergleich mit numerischen Untersuchungen

Für das vorgeschlagene mechanische Modell zur Erfassung der Behälter-Untergrund-Interaktion unter Berücksichtigung der Gründungsflexibilität ist es erforderlich, eine Überprüfung der Berechnungsergebnisse vorzunehmen, um dessen Leistungsfähigkeit beurteilen zu können. Zur Behälter-Untergrund-Interaktion sind in der Literatur keine aussagefähigen experimentellen Untersuchungen vorhanden. Um dennoch eine Bewertung der entwickelten Modelle zu ermöglichen, wurden umfangreiche numerische Berechnungen durchgeführt.

Dazu wurde ein Programmsystem auf der Basis der Methode der Finiten Elemente verwendet [53, 68, 85]. Mit diesem Programmsystem ist eine Berechnung des Gesamtsystems Behälter-Flüssigkeit-Untergrund unter Berücksichtigung der Interaktion der einzelnen Komponenten möglich. Die durch die Wellenabstrahlung in den Halbraum verursachte Dämpfung wird durch spezielle Randbedingungen und infinite Elemente berücksichtigt (Abb. 4.7, Schäpertöns [53]).

Zur Bewertung des mechanischen Modells werden die modale Dämpfung und die Resonanzfrequenz herangezogen. An einem konkreten Erdbeben werden die Zeitverläufe der hervorgerufenen dynamischen Kräfte ermittelt.

4.2.1 Ermittlung der dynamischen Kenngrößen

Die Erfassung der Abstrahlungsdämpfung mit dem verwendeten Programmsystem ist nur bei Zeitverlaufsrechnungen unter Anwendung der direkten Integration der Bewegungsgleichungen möglich. Um die Resonanzfrequenzen und die modalen Dämpfungen bestimmen zu können, wurde das Ausschwingverhalten des Rechenmodells ermittelt.

Dafür wurde eine Fußpunktanregung des Behälters nach Abb. 4.8 vorgenommen. Für einen Behälter mit den Parametern $\alpha = 1.0$, $R/d = 1000$, $\delta = 10^{-6}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7.85t/m^3$, $\rho_L = 1t/m^3$, $V = 19200m^3$ sind die Zeitverläufe der horizontalen und vertikalen Resultierenden der Flüssigkeitsdrücke in der Abb. 4.9 angegeben. Für den Untergrund sind in dem dargestellten Beispiel folgende Werte verwendet worden: $\nu_S = 0.3$, $v_S = 400m/s$, $\rho_S = 2t/m^3$. Aus den Amplitudenspektren der Zeitverläufe lassen sich die Resonanzfrequenzen bestimmen (Abb. 4.10). Zur Ermittlung der modalen Dämpfung wird eine gefensterete Berechnung der Amplituden-Spektren durchgeführt. In den Abb. 4.11 und 4.12 sind die Amplitudenspektren für ein Zeitfenster von 18 s bei einer Verschiebung der Zeitfenster von 2 s dargestellt. Aus der zeitlichen Abnahme der Amplitude der jeweiligen Resonanzfrequenz läßt sich die Dämpfung ermitteln (Abb. 4.13).

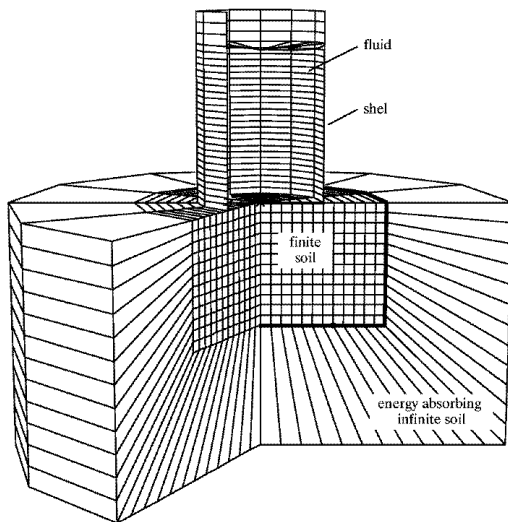


Abb. 4.7: FE-Modell (aus [61]).

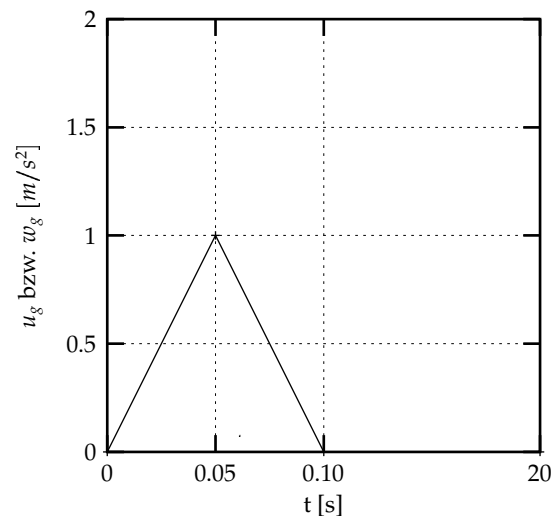


Abb. 4.8: Belastungsfunktion.

Hinweise zu den FE-Modellen

Bei den numerischen Berechnungen war darauf zu achten, daß die Höhe und der Durchmesser des finiten Bodenbereichs wenigstens doppelt so groß sind wie der Behälterdurchmesser. Weiterhin ist die Vernetzung der Behälterschale für Schlankheiten $\alpha \leq 0.8$ mit wenigstens 50 Elementen

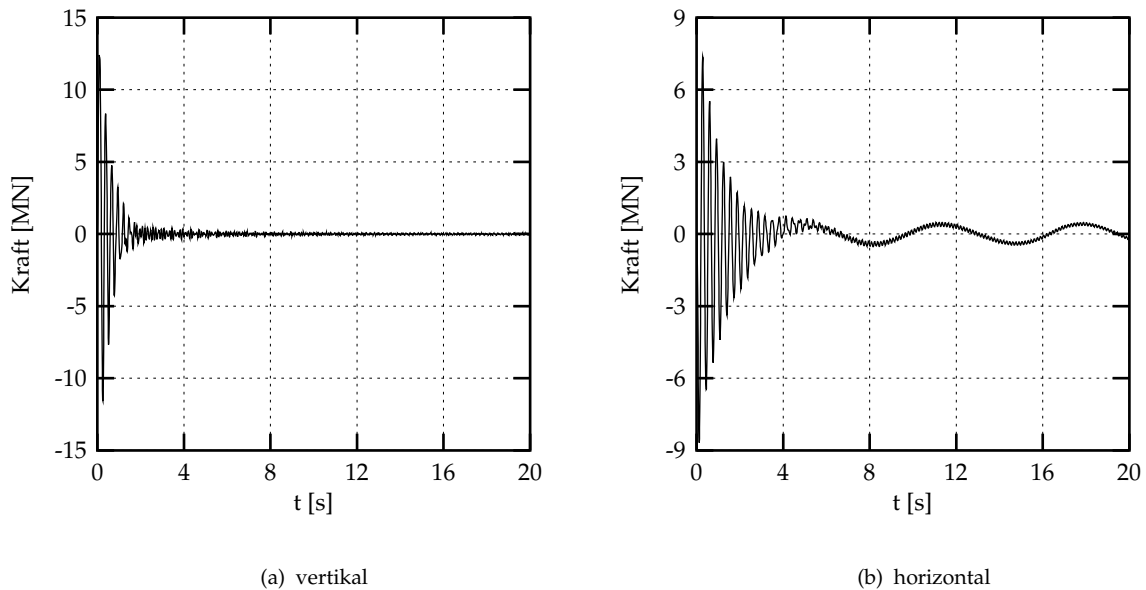


Abb. 4.9: Ausschwingkurven für $\alpha = 1.0$, $R/d = 1000$, $v_s = 400 \text{ m/s}$.

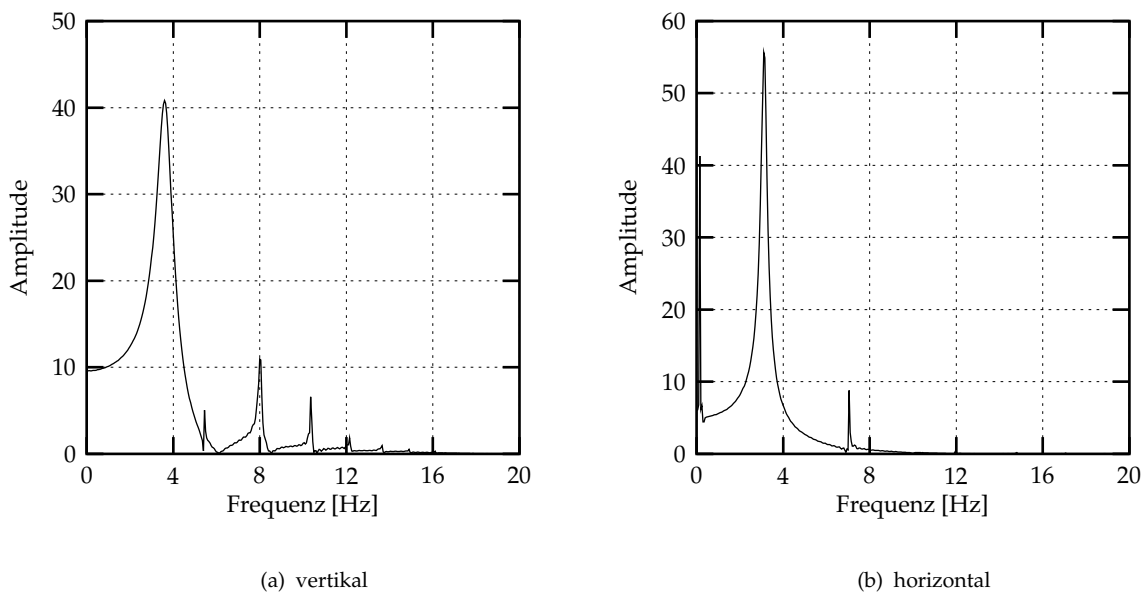


Abb. 4.10: Fourierspektren für $\alpha = 1.0$, $R/d = 1000$, $v_s = 400 \text{ m/s}$.

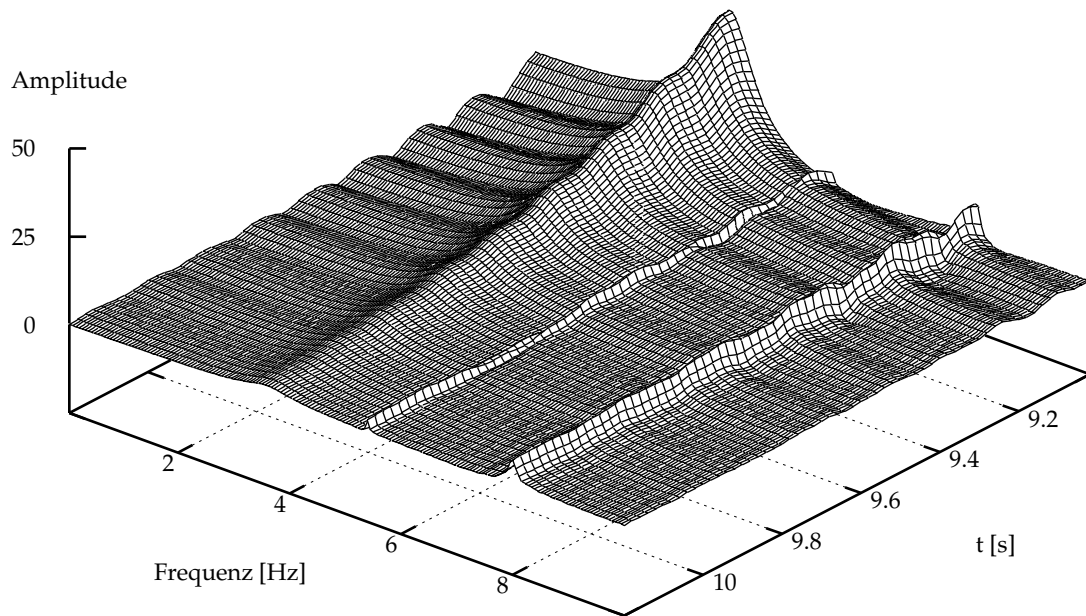


Abb. 4.11: Gefensterste Amplitudenspektren für $\alpha = 1.0$, $R/d = 1000$, $v_s = 400 \text{ m/s}$, vertikale Anregung.

über die Höhe vorzunehmen. Für Behälter mit größerer Schlankheit ($\alpha > 0.8$) sind mindestens 80 Elemente erforderlich, um die Frequenzen höherer Modes ($n = 2..4$) ausreichend genau zu ermitteln. Für Scherwellengeschwindigkeiten des Untergrundes von $v_s \leq 300 \text{ m/s}$ konnte keine Konvergenz in den Ergebnissen erreicht werden. Die ermittelten Dämpfungen schwankten sehr stark (bis zu 50%) in Abhängigkeit von der Größe des finiten Bodenbereichs. Durch die begrenzte Rechnerkapazität konnte keine weitere Vergrößerung des finiten Bodensystems bis zu einer möglichen Stabilität der Ergebnisse vorgenommen werden. Es wurden Bodenelemente mit einer Größe von $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ verwendet. Dabei konnte festgestellt werden, daß eine Verkleinerung der Bodenelemente nur eine geringe Auswirkung auf die Ergebnisse besitzt. Als Zeitschrittweite wurde 0.01 s gewählt.

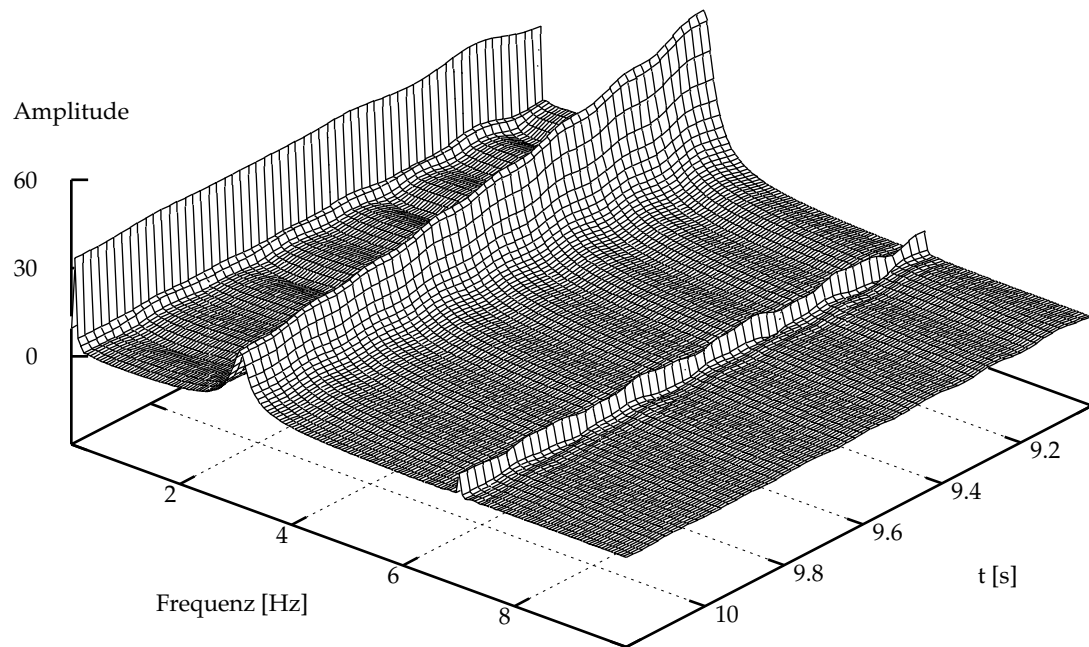
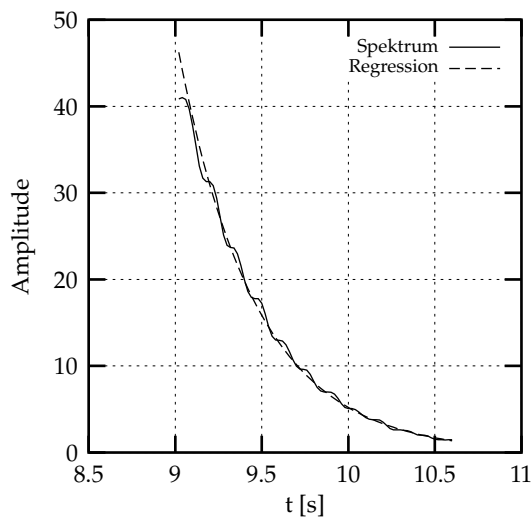
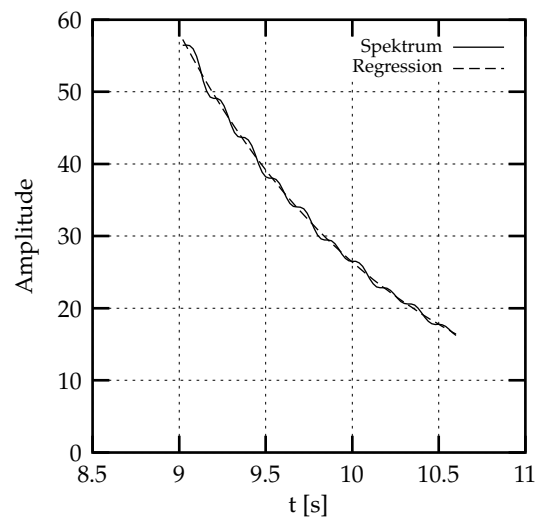


Abb. 4.12: Gefensterste Amplitudenspektren für $\alpha = 1.0$, $R/d = 1000$, $v_S = 400 \text{ m/s}$, horizontale Anregung.



(a) vertikal



(b) horizontal

Abb. 4.13: Amplitudenabnahme im 1.Mode für $\alpha = 1.0$, $R/d = 1000$, $v_S = 400 \text{ m/s}$.

4.2.2 Vergleich der dynamischen Kenngrößen

Die Berechnungen zum Vergleich der dynamischen Kenngrößen (Resonanzfrequenz, Abstrahlungsdämpfung) werden für die in Abb. 4.14 angegebenen Parametern durchgeführt. In den Abb. 4.15 bis 4.18 sind die Ergebnisse der Finite-Elemente-Berechnungen und des erweiterten mechanischen Modells gegenübergestellt.

Bei vertikaler Anregung sind kaum Unterschiede in den dynamischen Kenngrößen zwischen starrem und flexiblem Fundament vorhanden. Die Werte des erweiterten mechanischen Modells stimmen gut mit denen der Finite-Elemente-Berechnungen überein (Abb. 4.15, 4.16).

Unter horizontaler Anregung treten bei gedrunenen Behältern größere Unterschiede in den Resonanzfrequenzen zwischen dem erweiterten mechanischen Modell und den Finite-Elemente-Berechnungen auf. Die FE-Berechnungen liefern größere Resonanzfrequenzen bei einem starrem Fundament. Bei gedrunenen Behältern sind mit dem erweiterten mechanischen Modell keine Unterschiede in den Resonanzfrequenzen von starrem und flexiblem Fundament zu beobachten. Dagegen treten bei der Finite-Elemente-Methode auch hier Frequenzunterschiede auf. Die Tendenz der Frequenzänderung von starrem und flexiblem Fundament wird durch beide Verfahren bestätigt (Abb. 4.18).

Auf die Abstrahlungsdämpfung hat die Fundamentsteifigkeit nur einen geringen Einfluß. Nur bei sehr gedrunenen Behältern ($\alpha < 0.5$) tritt eine Verkleinerung der Abstrahlungsdämpfung durch die Flexibilität des Fundaments auf (Abb. 4.17).

Das erweiterte mechanische Modell kann die Behälter-Untergrund-Interaktion im Vergleich zu numerischen Berechnungsverfahren gut wiedergeben. Die Unterschiede zwischen beiden Verfahren sind stets kleiner als 5%.

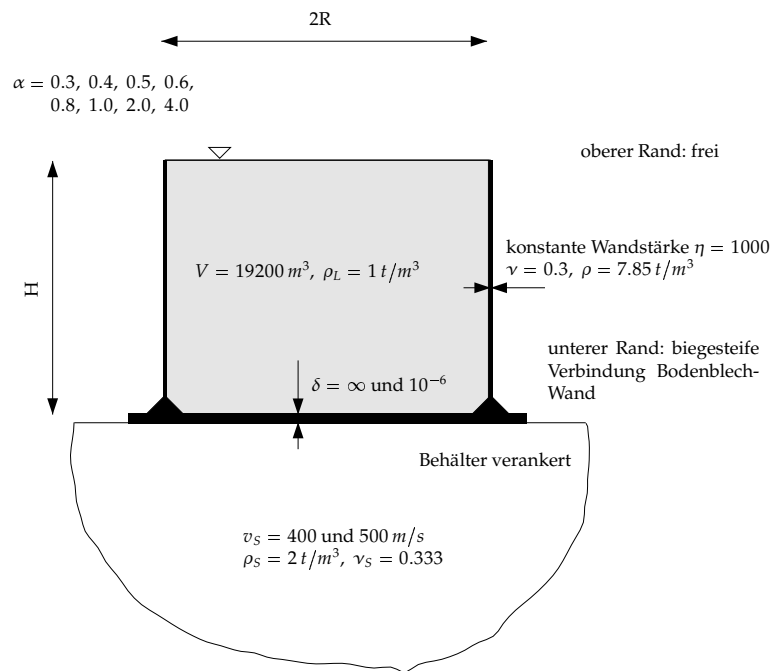


Abb. 4.14: Parameter für die numerischen Untersuchungen.

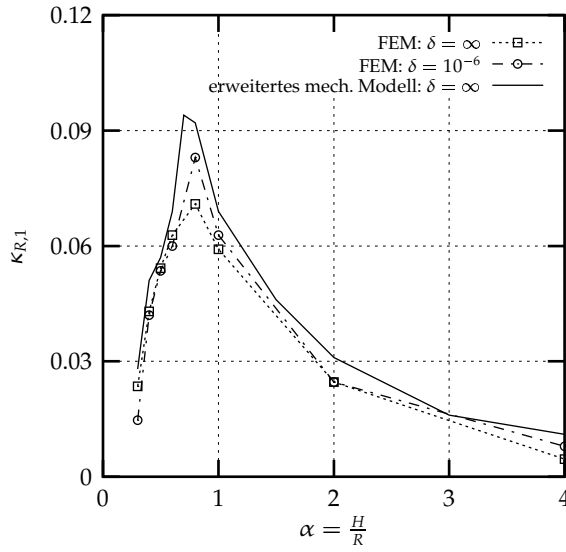
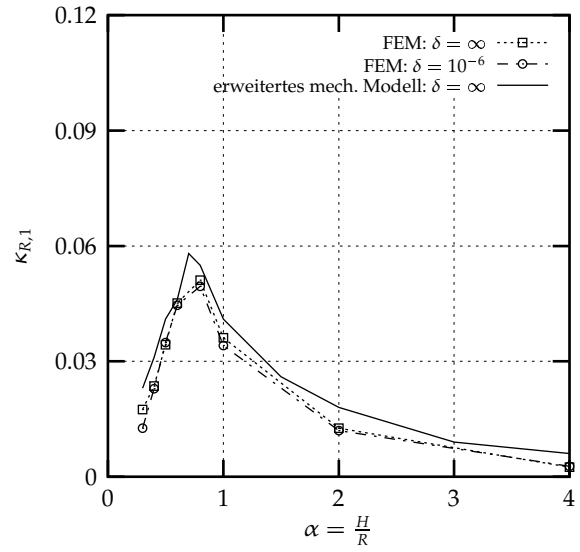
(a) $v_S = 400 \text{ m/s}$ (b) $v_S = 500 \text{ m/s}$

Abb. 4.15: Modale Dämpfung bei vertikaler Anregung.

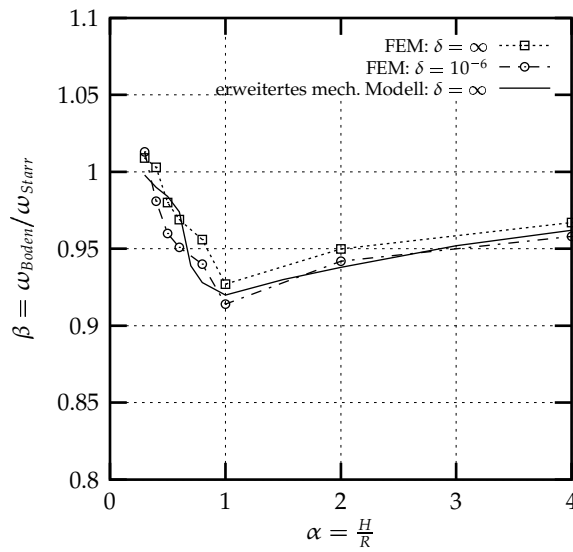
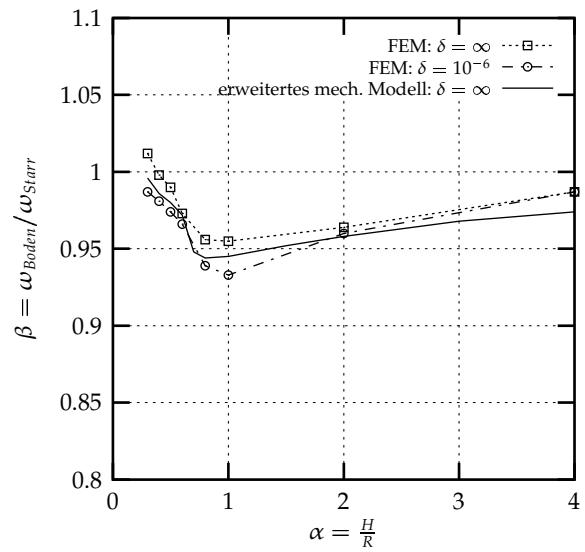
(a) $v_S = 400 \text{ m/s}$ (b) $v_S = 500 \text{ m/s}$

Abb. 4.16: Änderung der Resonanzfrequenz bei vertikaler Anregung.

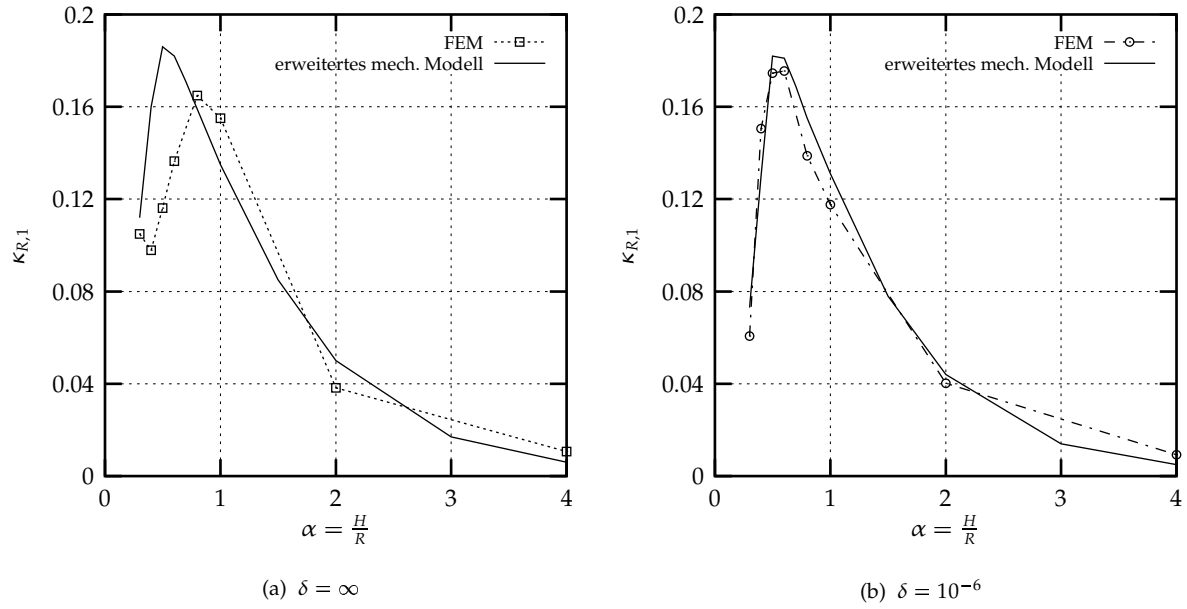
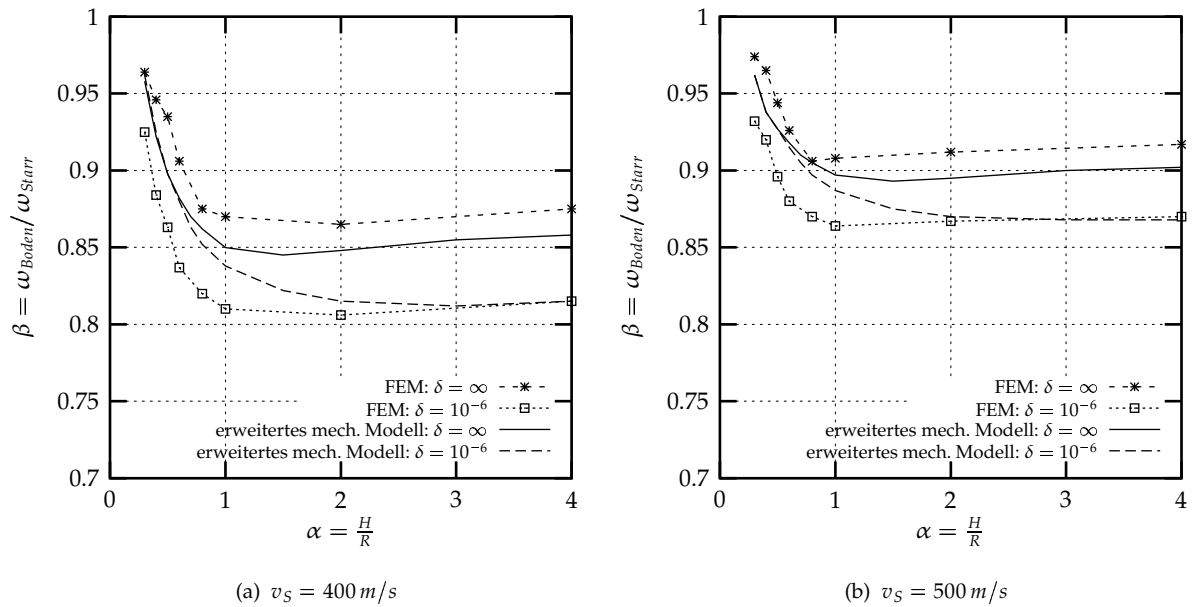
Abb. 4.17: Modale Dämpfung bei horizontaler Anregung, $v_S = 400 \text{ m/s}$.

Abb. 4.18: Änderung der Resonanzfrequenz bei horizontaler Anregung.

4.2.3 Berechnungsbeispiele für einen Erdbebenzeitverlauf

Durch Anwendung der diskreten Fourier-Transformation können mit den Übertragungsfunktionen des erweiterten mechanischen Modells (Abschnitt 4.1) die Zeitverläufe der seismischen Antwortgrößen bestimmt werden. Für einen konkreten Erdbebenzeitverlauf wird die Leistungsfähigkeit des des erweiterten Modells im Vergleich zu FE-Berechnungen untersucht. Als Erdbebenzeitverlauf wird das Erzincan-Beben von 1992 verwendet. Die Vertikal- und Ost-West-Komponente der Freifeldbeschleunigung ist in der Abb. 4.20 dargestellt.

Die Berechnungen wurden mit den in Abb. 4.19 angegebenen Parametern durchgeführt. Eine Materialdämpfung der Schale, der Flüssigkeit bzw. des Untergrundes konnte mit dem zur Verfügung stehenden FE-Programmsystem nicht berücksichtigt werden. Es ist somit ausschließlich die Wellenabstrahlung in den Halbraum als Dämpfungswirkung vorhanden.

Für die den Untergrund repräsentierenden Feder-Dämpfer-Elemente wurden die Impedanzfunktionen aus Kapitel 3 bei einer bezogenen Plattensteifigkeit von $\delta = 10^{-6}$ verwendet.

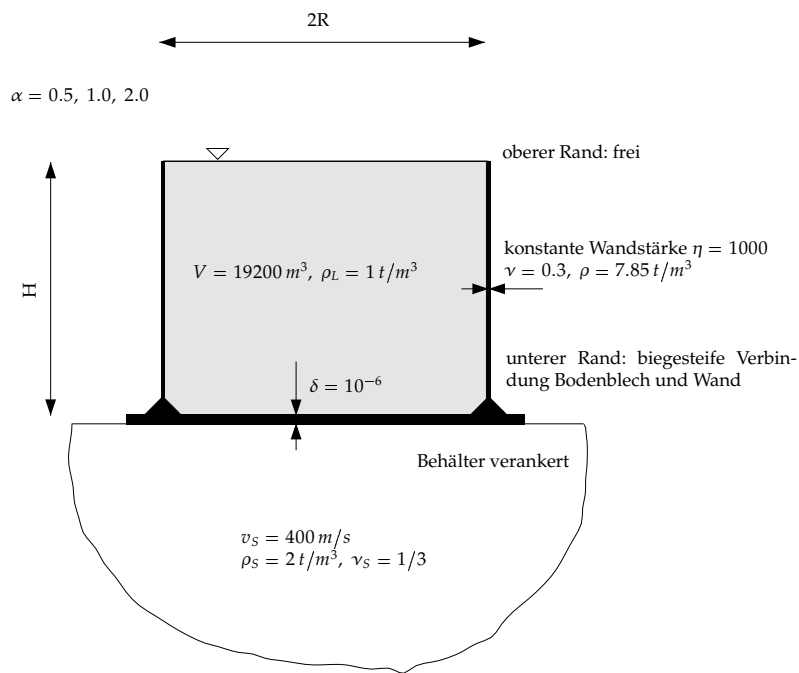


Abb. 4.19: Parameter für die Beispielrechnungen

Die Abb. 4.21 bis 4.23 geben die Zeitverläufe der dynamisch aktivierten Flüssigkeitsmasse für die vertikale und Ost-West-Komponente des Erzincan-Erdbebens im Verhältnis zur Gesamtmasse der Behälterflüssigkeit an.

Bei gedrunenen Behältern treten Unterschiede infolge der schlechteren Bestimmung des Zeitverlaufs der Schwappschwingung auf (Abb. 4.21). Die Eigenfrequenz der Schwappschwingung ist bei dem gedrunenen Behälter relativ klein ($f_{SL} = 0.12 \text{ Hz}$). Die spektrale Auflösung der Übertragungsfunktion beträgt in Abhängigkeit von der Länge des Zeitverlaufs $1/20\text{s} = 0.05 \text{ Hz}$. Dieser Wert ist zu groß, um die Übertragungsfunktion der Schwappschwingung ausreichend genau bestimmen zu können.

Besonders gute Ergebnisse liefert das erweiterte Modell bei dem schlanken Behälter mit $\alpha = 2$. Die Schwappschwingung besitzt in diesem Fall einen geringeren Anteil an den Antwortgrößen.

Das erweiterte mechanische Modell zur Berechnung der Interaktion von Behälter, Flüssigkeit

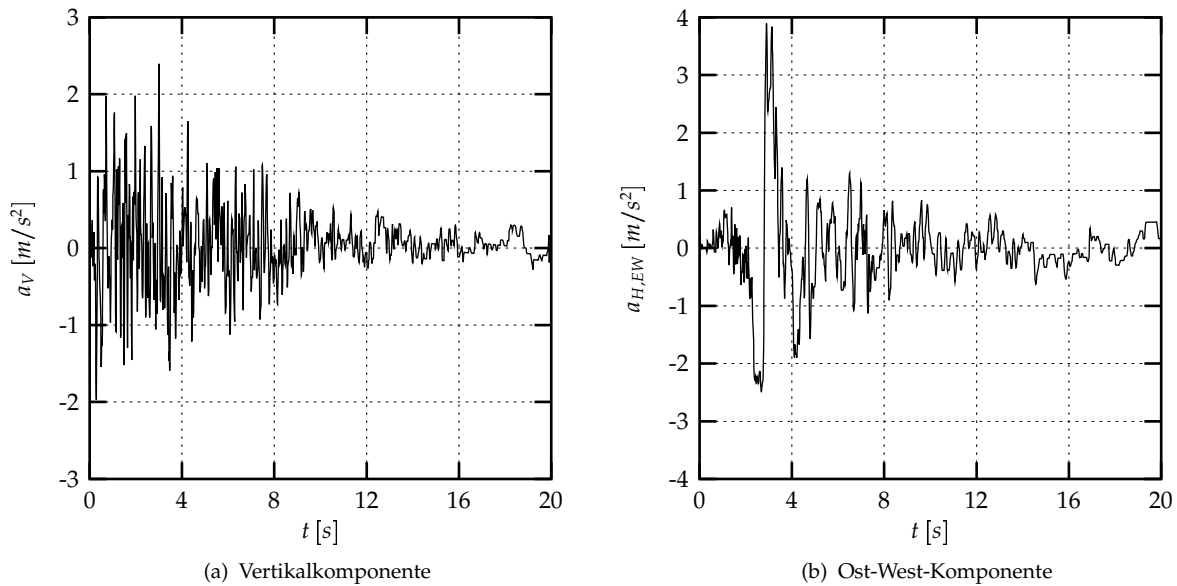


Abb. 4.20: Zeitverläufe des Erzincanbebens 1992.

und Untergrund ist somit gut geeignet, die Zeitverläufe der Antwortgrößen bei seismischen Einwirkungen zu ermitteln.

4.3 Zusammenfassung

Es werden die Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems Behälter-Flüssigkeit-Untergrund angegeben. Dabei wird auf das von Veletsos und Tang [72, 75] angegebene mechanische Modell zurückgegriffen. Darin sind die impulsiven und die konvektiven Druckanteile, die sowohl durch die Horizontal- als auch durch die Kippbewegung des Behälters entstehen, enthalten. Die Flexibilität der Behältergründung wird mit denen in Kapitel 3 abgeleiteten Impedanzfunktionen berücksichtigt. Die Modelle von Veletsos und Tang [72, 74, 75] werden hinsichtlich der Kopplung von Horizontal- und Kippbewegung des Fundamentes und der Materialdämpfung von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund erweitert.

Mit den Bewegungsgleichungen werden Übertragungsfunktionen des erweiterten mechanischen Modells ermittelt. Daraus können die Resonanzfrequenzen und die zugehörigen Dämpfungen des Gesamtsystems bestimmt werden.

Hinsichtlich des dynamischen Verhaltens des Behälter-Flüssigkeit-Untergrund-Systems können folgende Aussagen getroffen werden:

- Die Erhöhung der Flexibilität der Behältergründung führt insbesondere bei schlanken Behältern ($\alpha \geq 1$) und horizontaler seismischer Anregung zu einer Verringerung der Resonanzfrequenz gegenüber der starren Gründung.
- Die Erhöhung der Fundamentflexibilität führt bei sehr gedrunenen Behältern ($\alpha < 0.5$) sowie horizontaler seismischer Anregung zu einer Verringerung der Abstrahlungsdämpfungen und damit zu einer Erhöhung der Antwortgrößen.
- Die Fundamentsteifigkeit hat auf die dynamischen Kenngrößen bei vertikaler seismischer Anregung einen geringen Einfluß und kann vernachlässigt werden.

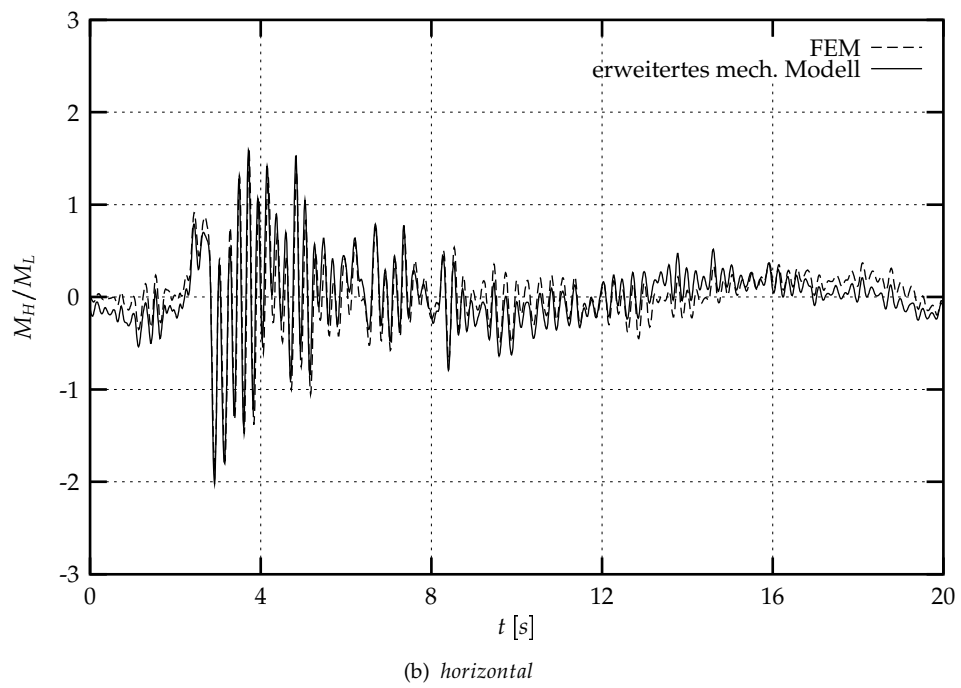
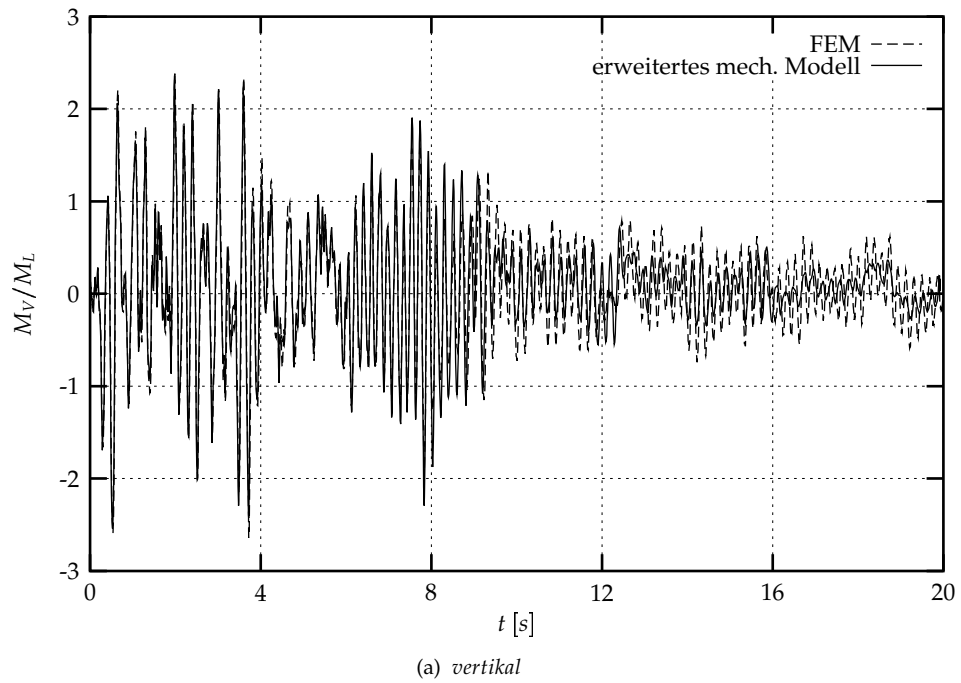
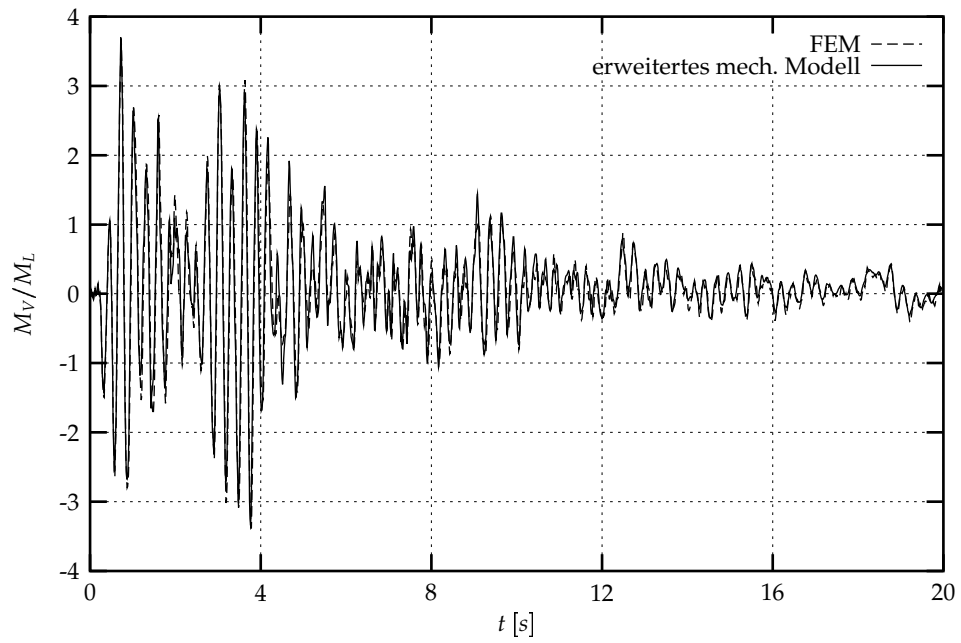
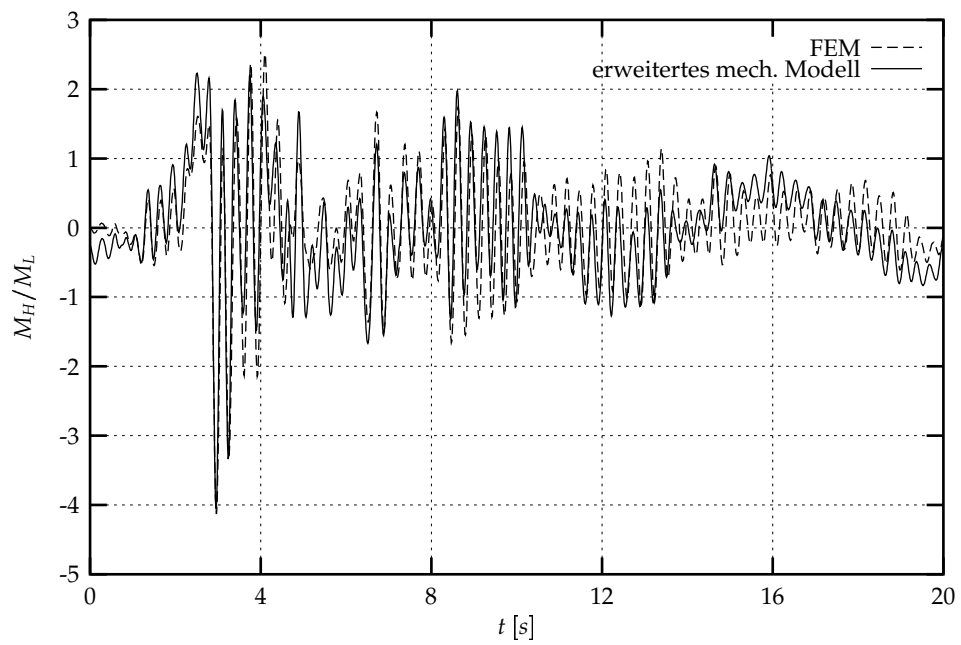


Abb. 4.21: Zeitverlauf der Ersatzmassen für Behälterschlankeit $\alpha = 0.5$ bei $v_S = 400 \text{ m/s}$.



(a) vertikal



(b) horizontal

Abb. 4.22: Zeitverlauf der Ersatzmassen für Behälterschlankeit $\alpha = 1.0$ bei $v_S = 400 \text{ m/s}$.

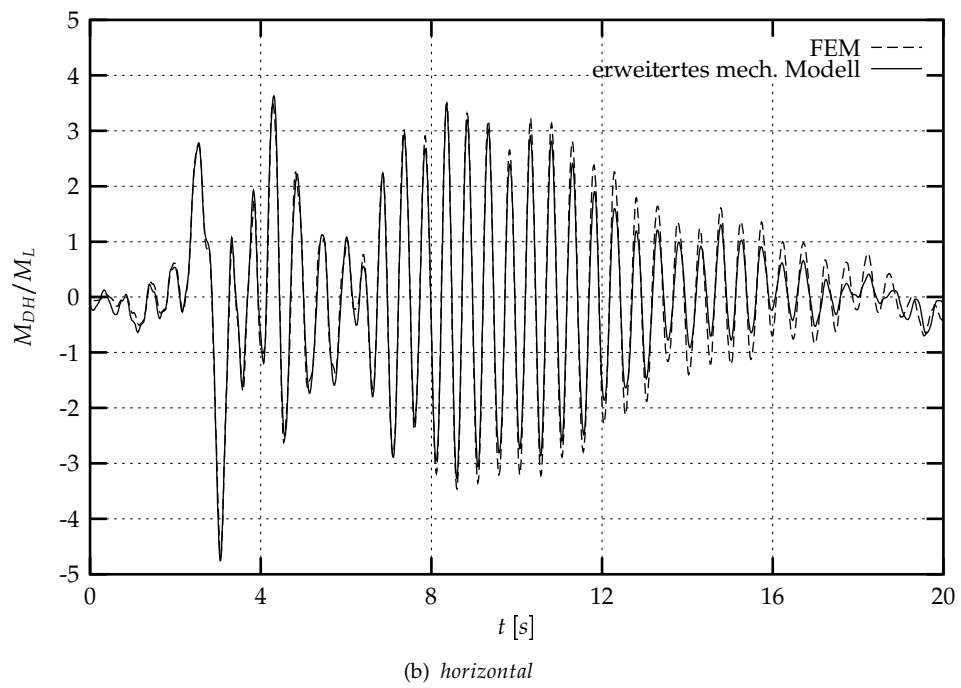
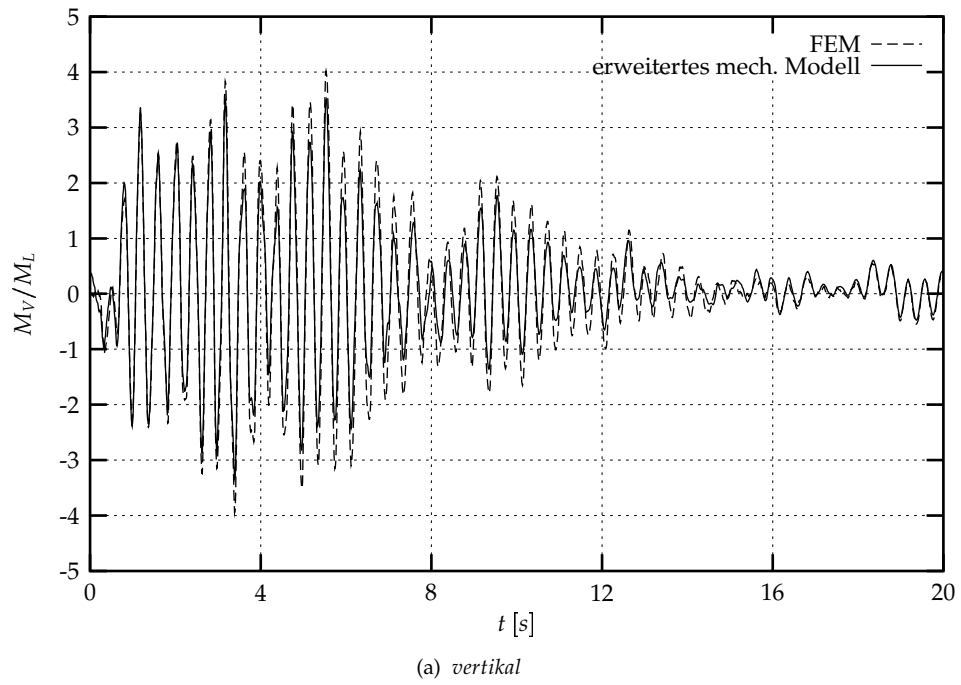


Abb. 4.23: Zeitverlauf der Ersatzmassen für Behälterschlankeit $\alpha = 2.0$ bei $v_S = 400 \text{ m/s}$.

- Die Interaktion von Behälter und Untergrund ist von der Behälterschlantheit und der Steifigkeit der Behälterschale abhängig, eine höhere Steifigkeit der Behälterschale vergrößert die Interaktionseffekte.
- Die Interaktion der Schwappschwingung der Flüssigkeit mit dem Untergrund ist von untergeordneter Bedeutung und kann vernachlässigt werden.
- Die Interaktion von Behälter und Untergrund wirkt sich am stärksten auf den 1. Mode der gemeinsamen Schwingung von Behälter und Flüssigkeit aus; der Einfluß der Interaktion auf höhere Modes ist gering und kann für das Ingenieurverfahren vernachlässigt werden.
- Die Änderung der Resonanzfrequenz und die Abstrahlungsdämpfung infolge der Interaktion von Behälter und Untergrund sind vom Behältervolumen unabhängig.

Zur Behälter-Untergrund-Interaktion stehen keine aussagekräftigen empirischen Untersuchungsergebnisse zur Verfügung. Um eine Bewertung des erweiterten mechanischen Modells vornehmen zu können, werden Vergleiche mit numerischen Berechnungsverfahren durchgeführt. Für die numerischen Berechnungen wurde ein Programmsystem auf Basis der Methode der Finiten Elemente verwendet ([53, 68, 85]). Spezielle Randbedingungen und infinite Elemente erlauben die Berücksichtigung der Wellenabstrahlung in den Halbraum.

Aus dem Vergleich der Resonanzfrequenzen und der modalen Dämpfungen beider Berechnungsverfahren können folgende Aussagen abgeleitet werden:

- Für gedrungene Behälter ($\alpha \leq 1$) ergeben die numerischen Berechnungen kleinere Resonanzfrequenzen als das Ingenieurverfahren.
- Bei schlanken Behältern ($\alpha > 1$) liegt eine gute Übereinstimmung der Resonanzfrequenzen aus beiden Verfahren vor.
- Die Abstrahlungsdämpfung kann für eine flexible Gründung gut mit dem erweiterten mechanischen Modell beschrieben werden.

Durch Anwendung der diskreten Fourier-Transformation ist die Berechnung von Antwortzeitverläufen für das Behälter-Flüssigkeit-Untergrund-System möglich. Für ein konkretes Erdbeben wurden die Zeitverläufe der seismisch aktivierten resultierenden Kräfte ermittelt und mit Berechnungen auf Basis der FEM verglichen. Mit dem vorgeschlagenen Modell konnten die Antwortzeitverläufe von schlanken Behältern ($\alpha > 1$) exakter als von gedrungenen bestimmt werden. Bei gedrungenen Behältern werden etwas zu kleine Antwortgrößen der Schwappschwingung ermittelt. Das ist in der zu geringen spektralen Auflösung der Übertragungsfunktion begründet, da die verwendeten Zeitverläufe nur eine Länge von 20 Sekunden aufwiesen.

5 Äquivalentes Ersatzsystem

Für die Ermittlung der seismischen Antwortgrößen im Rahmen eines Ingenieurverfahrens ist es zweckmäßig, die Antwortspektrenmethode anwenden zu können. Mit dem gekoppelten Gesamtsystem aus *Kapitel 4* ist das jedoch nicht möglich. Ziel des folgenden Kapitels ist es deshalb, ein Berechnungsmodell anzugeben, bei dem die Interaktion von Flüssigkeit, Behälter und Untergrund mit der Antwortspektrenmethode bestimmt werden kann.

In *Abschnitt 5.1* wird dargestellt, wie eine näherungsweise “Entkopplung” der Bewegungsgleichungen des erweiterten mechanischen Modells von *Kapitel 4* durchgeführt wird. Dazu wird das von Veletsos und Tang in [72, 74] angegebene äquivalente Ersatzsystem verwendet.

Anhand einer Parameteruntersuchung werden in *Abschnitt 5.2* Eigenfrequenzen und Dämpfungsmaße für das äquivalente Ersatzsystem angegeben.

In *Abschnitt 5.3* wird dargestellt, wie die Maximalantworten bei Anwendung der Antwortspektrenmethode überlagert werden müssen. Als Ergebnis erhält man die den Behälter beanspruchenden maximalen Druckverteilungen, resultierenden Kräfte und Umsturzmomente. Zusammenfassend wird der Berechnungsablauf für das Ingenieurverfahren dargestellt.

Die für eine Bemessung hinsichtlich Erdbebeneinwirkung durchzuführenden Nachweise der Behälterschale werden in *Abschnitt 5.4* angegeben.

Ein Anwendungsbeispiel in *Abschnitt 5.5* schließt das Kapitel ab.

5.1 Ableitung des äquivalenten Ersatzsystems

Mit dem in *Kapitel 4* angegebenen Gesamtsystem ist eine Berechnung der zeitabhängigen seismischen Antwortgrößen mit Hilfe der Fourier-Transformation möglich. Für eine praktische Berechnung ist es jedoch zweckmäßig, die Antwortspektrenmethode anwenden zu können. Dazu ist eine modale Analyse des gekoppelten Gesamtsystems von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund erforderlich. Aufgrund der unterschiedlichen Dämpfungen der Teilsysteme ist eine modale Entkopplung der Bewegungsgleichungen schwer durchzuführen. Von Veletsos und Tang [72, 74] wird deshalb vorgeschlagen, das auf Feder-Dämpfer-Elementen gelagerte System von gekoppelten Einfreiheitsgradschwingern durch ein starr gelagertes System von entkoppelten Einfreiheitsgradschwingern zu ersetzen.

Bei diesem äquivalenten Ersatzsystem werden die Eigenfrequenzen und Dämpfungen so festgelegt, daß die Amplitudenfunktionen beider Systeme im Resonanzbereich möglichst gut übereinstimmen. Dabei sind nur die Eigenfrequenz und die Dämpfung des ersten Modes der impulsiven Komponente anzupassen. Die Eigenfrequenzen und die Dämpfungen der höheren Modes der impulsiven Komponente und aller Modes der Schwappschwingung bleiben gegenüber dem starr gelagerten Behälter-Flüssigkeit-System unverändert. Das ist dadurch begründet, daß die Interaktion mit dem Untergrund die Resonanzfrequenz und die Dämpfung der höheren Modes der impulsiven Komponente und der Schwappschwingung kaum beeinflußt.

In der Abb. 5.1 sind die Amplitudenfunktionen des gekoppelten Gesamtsystems und des äquivalenten Ersatzsystems für die Behälterschlankeiten $\alpha = 0.5$ und 2.0 für die Masse $M_{DV,1}$ bzw. $M_{DH,1}$ dargestellt.

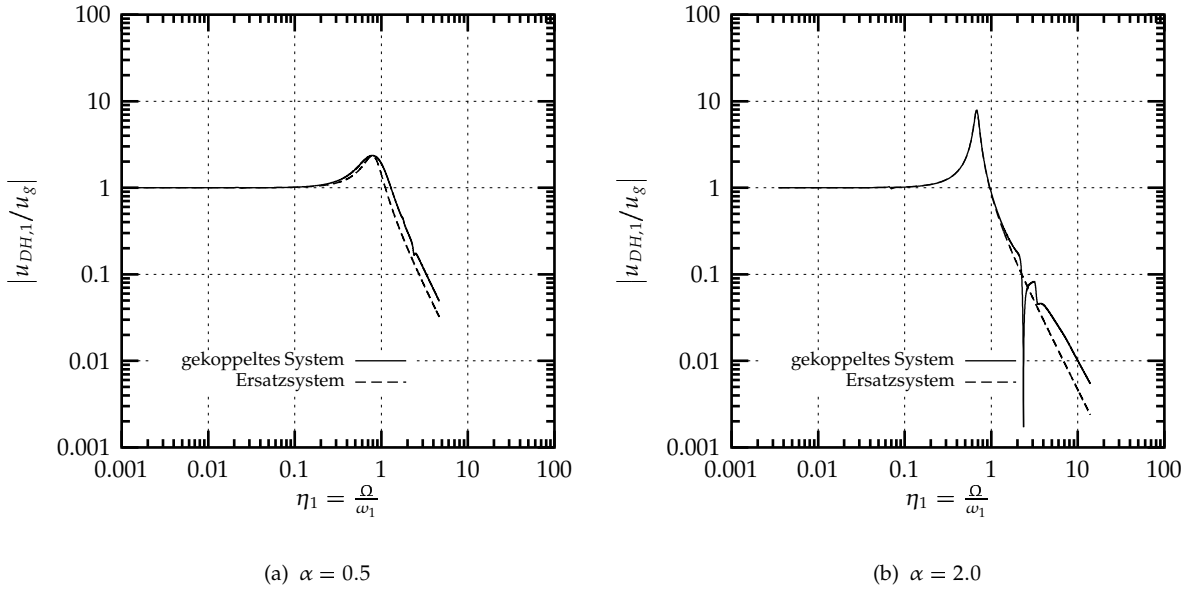


Abb. 5.1: Amplitudenfunktion für horizontale Anregung bei $R/d = 1000$, $\kappa = 0.02$, $\kappa_{SL} = 0.005$, $v_s = 250 \text{ m/s}$

Die Eigenfrequenzen $\bar{\omega}_1$ und die Dämpfungen $\bar{\kappa}_1$ des äquivalenten Ersatzsystems werden mit Glg. 5.1a (vertikale Anregung) bzw. 5.1b (horizontale Anregung) bestimmt. Die Massen $M_{DV,n}$, $M_{DH,n}$, $M_{SLH,n}$ und Höhenordinaten $H_{DH,n}$, $H_{SLH,n}$ des äquivalenten Ersatzsystems ändern sich gegenüber den Werten des gekoppelten Gesamtsystems nicht.

$$\max \left(\frac{w_{DV,n}}{w_g} \right) = \frac{1}{2\bar{\kappa}_{DV,1}\sqrt{1 - \bar{\kappa}_{DV,1}^2}} \quad \frac{\omega_R}{\bar{\omega}_{DV,1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\bar{\kappa}_{DV,1}^2}} \quad (5.1a)$$

$$\max \left(\frac{u_{DH,n}}{u_g} \right) = \frac{1}{2\bar{\kappa}_{DH,1}\sqrt{1 - \bar{\kappa}_{DH,1}^2}} \quad \frac{\omega_R}{\bar{\omega}_{DH,1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\bar{\kappa}_{DH,1}^2}} \quad (5.1b)$$

In den Abb. 5.2 und 5.3 sind die mechanischen Modelle des äquivalenten Ersatzsystems denen des gekoppelten Gesamtsystems gegenübergestellt.

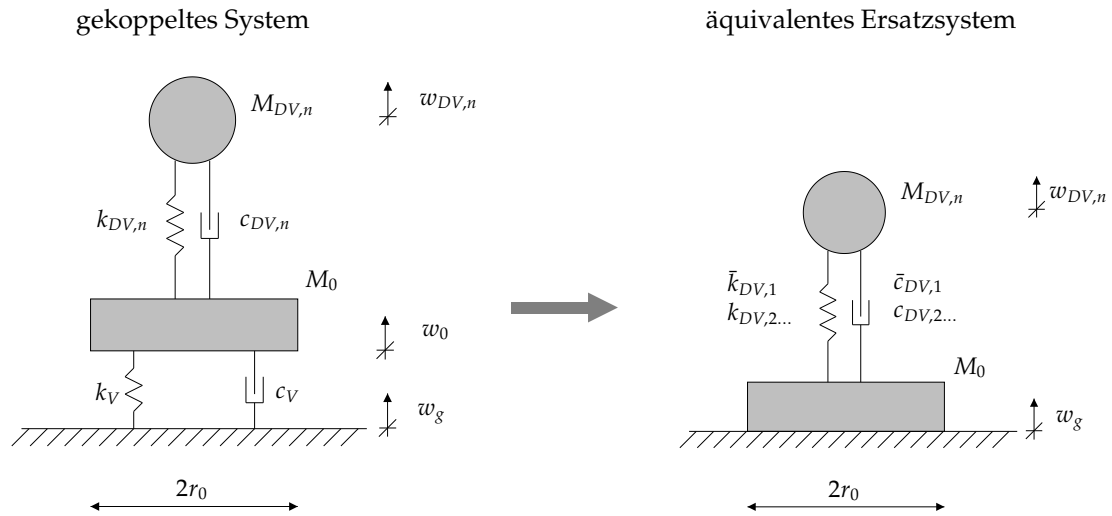


Abb. 5.2: Vertikale Anregung.

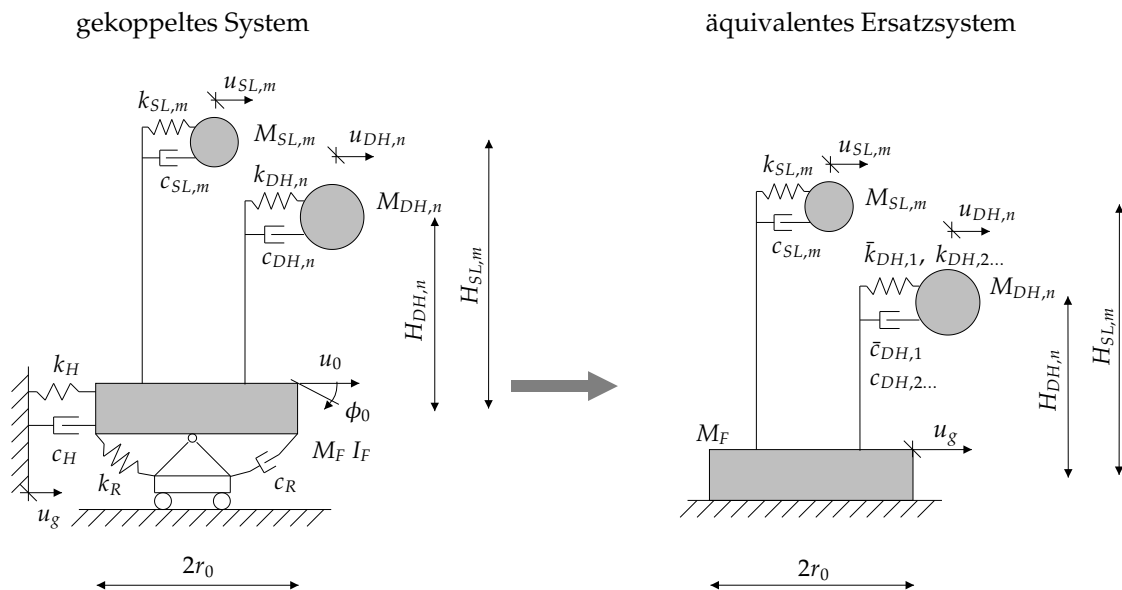


Abb. 5.3: Horizontale Anregung.

5.2 Dynamische Kenngrößen des äquivalenten Ersatzsystems

Aus den Übertragungsfunktionen des gekoppelten Gesamtsystems wurden in einer Parameteruntersuchung die Frequenz- und Dämpfungswerte des äquivalenten Ersatzsystems (Abb. 5.2) für den ersten Mode der impulsiven Interaktionsschwingung ($n = 1$) berechnet. In der Parameteruntersuchung wurden die in Abb. 5.4 angegebenen Behälter- und Untergrundkenngrößen verwendet. Gegenüber den Ausführungen von Veletsos und Tang [74] ist die Kopplung von Kipp- und Horizontalbewegung des Fundament-Untergrund-Systems berücksichtigt worden. Es wurde angenommen, daß die Fundamentmasse vernachlässigbar klein ist (z.B. Membrangründung, s.a. [64]).

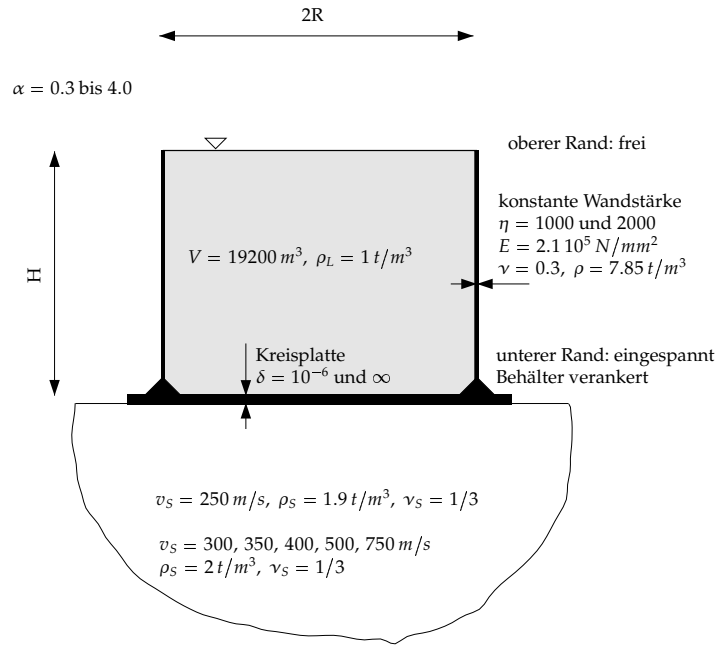


Abb. 5.4: Parameter für die durchgeführten Berechnungen.

5.2.1 Vertikale Anregung

Unter vertikaler Anregung ist der Einfluß der Fundamentsteifigkeit auf die Behälter-Untergrund-Interaktion vernachlässigbar gering. Es können deshalb die Impedanzfunktionen für das starre Fundament verwendet werden. Das konnte durch FE-Berechnungen gezeigt werden (Kapitel 4).

In Abb. 5.5 sind die Dämpfungswerte aus der Behälter-Untergrund-Interaktion für das Ersatzsystem angegeben. Die Abb. 5.6 enthält das Verhältnis β der Eigenfrequenz des äquivalenten Ersatzsystems zur Eigenfrequenz des starr gelagerten Behälter-Flüssigkeit-Systems (Kapitel 2). Aus den Abb. 5.5 und 5.6 wird der Einfluß der Steifigkeit des Behälters auf die Interaktion mit dem Untergrund deutlich. Eine geringere Behältersteifigkeit führt zu einer Reduzierung der Interaktionseffekte. Das Behältervolumen hat auf die Interaktion mit dem Untergrund keinen Einfluß.

Um die Materialdämpfung des Behälters zu berücksichtigen, ist es ausreichend, zur Abstrahlungsdämpfung den entsprechenden Wert einer viskosen Dämpfung für die Behälterwand (2% für Stahl, 5% für Stahlbeton) zu addieren. Die Dämpfung des ersten Modes der impulsiven Druckkomponente kann nach Glg. 5.2 bestimmt werden. Für die höheren Modes ist ausschließ-

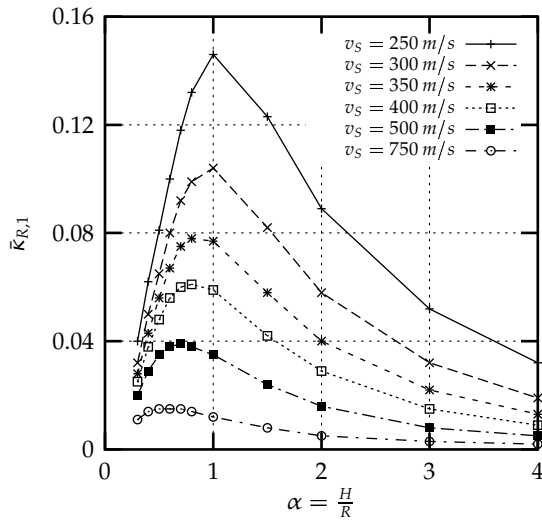
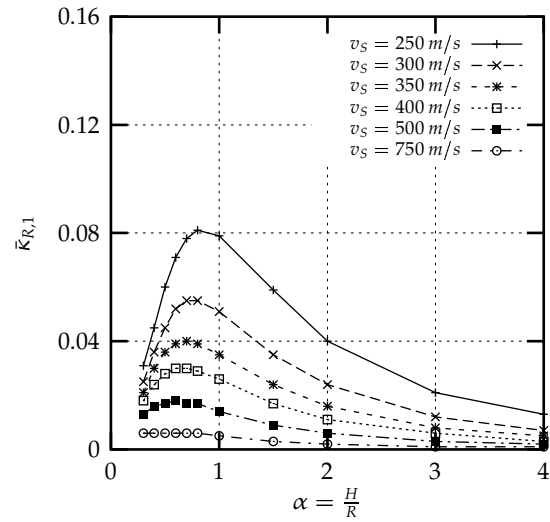
(a) $R/d=1000$ (b) $R/d=2000$

Abb. 5.5: Dämpfungsmaß $\bar{\kappa}_{R,1}$ des ersten Modes der impulsiven vertikalen Interaktionsschwingung des Ersatzsystems bei starrem Kreisfundament mit $\delta = \infty$.

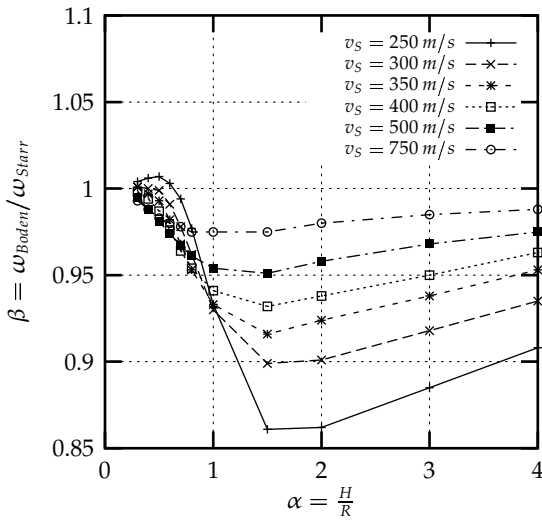
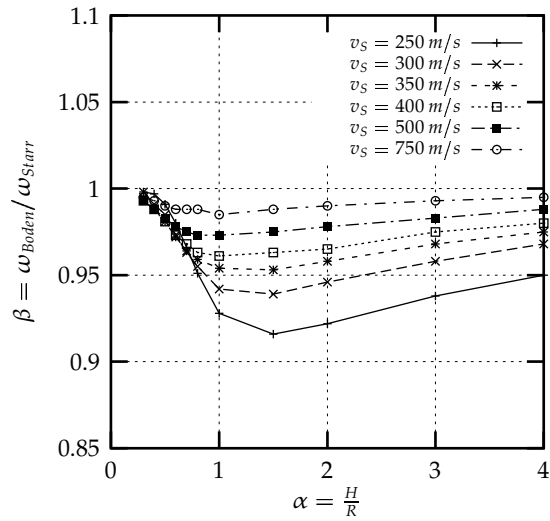
(a) $R/d=1000$ (b) $R/d=2000$

Abb. 5.6: Frequenzänderung β des ersten Modes der impulsiven vertikalen Interaktionsschwingung des Ersatzsystems bei starrem Kreisfundament mit $\delta = \infty$.

lich die Materialdämpfung des Behälters zu verwenden.

$$\bar{\kappa}_{DV,1} = \bar{\kappa}_{R,1} + \kappa_S(1 - \beta)^2 + \kappa \quad (5.2)$$

Darin bezeichnen κ die viskose Dämpfung des Behälters, κ_S die hysteretische Dämpfung des

Bodens und $\bar{\kappa}_{R,1}$ die Abstrahlungsdämpfung für den ersten Mode der impulsiven Interaktionsschwingung ($n = 1$).

Die Eigenfrequenz des ersten Modes des äquivalenten Ersatzsystem wird mit Glg. 5.3 ermittelt. Für die Eigenfrequenz $\omega_{0,1}$ des Behälter-Flüssigkeit-Systems sind die Angaben des Kapitels 2 zu verwenden. Die höheren Eigenfrequenzen $\omega_{0,2}, \dots$ des äquivalenten Ersatzsystems werden durch die Interaktion mit dem Untergrund kaum beeinflusst, und es sind die entsprechenden Werte des Kapitels 2 für den starr gelagerten Behälter zu verwenden.

$$\bar{\omega}_{0,1} = \beta \omega_{0,1} \quad (5.3)$$

5.2.2 Horizontale Anregung

Im Gegensatz zur vertikalen Anregung ist bei horizontaler Anregung die Steifigkeit des Fundaments für die Interaktion mit dem Untergrund von größerer Bedeutung. Es werden nachfolgend die Kenngrößen des Ersatzsystems für den ersten Mode der impulsiven Interaktionsschwingung ($n = 1$) angegeben. Die Abb. 5.7 gibt die Dämpfungsmaße $\bar{\kappa}_{R,1}$ infolge der Interaktion mit dem Untergrund für ein starres Kreisfundament an. Die auftretende Frequenzänderung ist in Abb. 5.8 dargestellt. Bei einem weicheren Behältertragwerk ($\eta = 2000$) verringern sich die Interaktionseffekte mit dem Untergrund.

Die Abb. 5.9 gibt die dynmischen Kenngrößen bei einer flexiblen Kreisplattengründung mit $\delta = 10^{-6}$ an. Durch die Flexibilität der Gründung wird die Abstrahlungsdämpfung κ_R von sehr gedungenen Behältern ($\alpha \leq 0.5$) verringert. Die Resonanzfrequenz wird durch eine Verringerung der Fundamentsteifigkeit verkleinert. Die Änderungen sind für schlanke Behälter ($\alpha \geq 1.0$) besonders ausgeprägt. Sie betragen für einen weichen Untergrund mit $v_s = 250 \text{ m/s}$ und einer Behälterschlantheit $\alpha = 4.0$ ca. 15%.

Eine Materialdämpfung des Behälters und des Untergrunds kann mit guter Näherung durch die

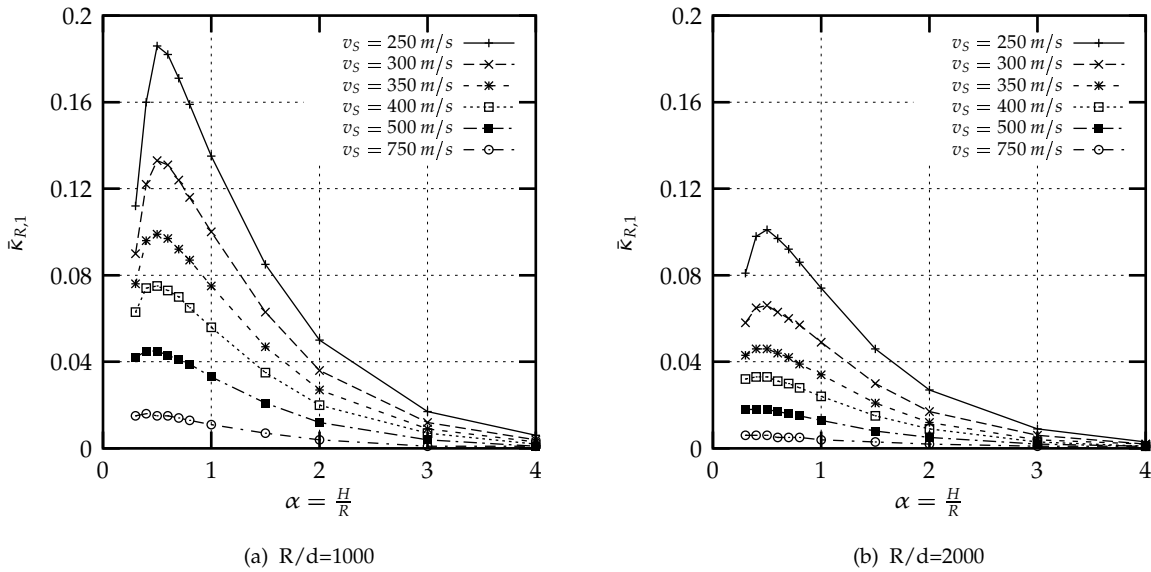


Abb. 5.7: Dämpfung $\bar{\kappa}_{R,1}$ des ersten Modes der impulsiven, horizontalen Interaktionsschwingung des Ersatzsystems bei starrem Kreisfundament mit $\delta = \infty$.

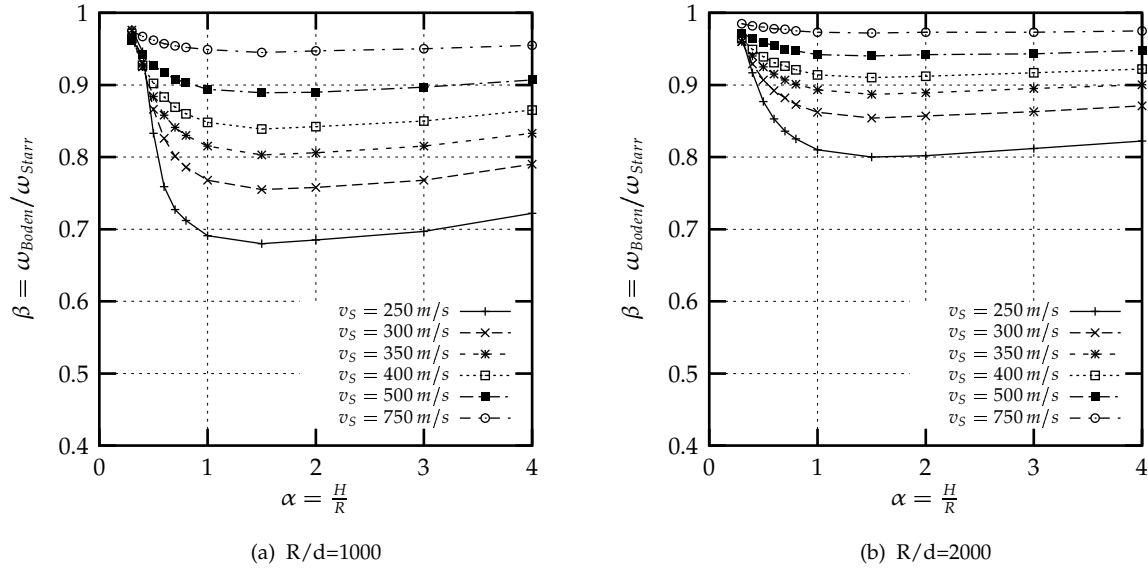


Abb. 5.8: Frequenzänderung β des ersten Modes der impulsiven horizontalen Interaktionsschwingung des Ersatzsystems bei starrem Kreisfundament mit $\delta = \infty$.

Glg. 5.4 berücksichtigt werden.

$$\bar{\kappa}_{DH,1} = \bar{\kappa}_{R,1} + \kappa_s(1 - \beta) + \kappa\beta^3 \quad (5.4)$$

Darin bedeuten κ die Materialdämpfung des Behälters, $\bar{\kappa}_{R,1}$ die Abstrahlungsdämpfung für den ersten Mode der impulsiven Interaktionsschwingung ($n = 1$) und κ_s die Materialdämpfung des Untergrundes.

Die Eigenfrequenz des ersten Modes der impulsiven Druckkomponente des äquivalenten Ersatzsystems wird mit Glg. 5.5 analog zur vertikalen Anregung bestimmt.

$$\bar{\omega}_{1,1} = \beta\omega_{1,1} \quad (5.5)$$

5.3 Ermittlung der Antwortgrößen mit dem äquivalenten Ersatzsystem

5.3.1 Ermittlung der maximalen modalen Antwortgrößen

Entsprechend *Abschnitt 5.1* ist mit dem von Veletsos und Tang vorgeschlagenen äquivalenten Ersatzsystem [72, 74] eine näherungsweise “Entkopplung” der Bewegungsgleichungen möglich. Damit können die seismisch hervorgerufenen Druckverteilungen mit der Antwortspektrenmethode bestimmen werden.

Es ist folgender Berechnungsablauf anzuwenden:

1. Bestimmung der Eigenfrequenzen und der Dämpfungen des äquivalenten Ersatzsystems nach *Abschnitt 5.2*

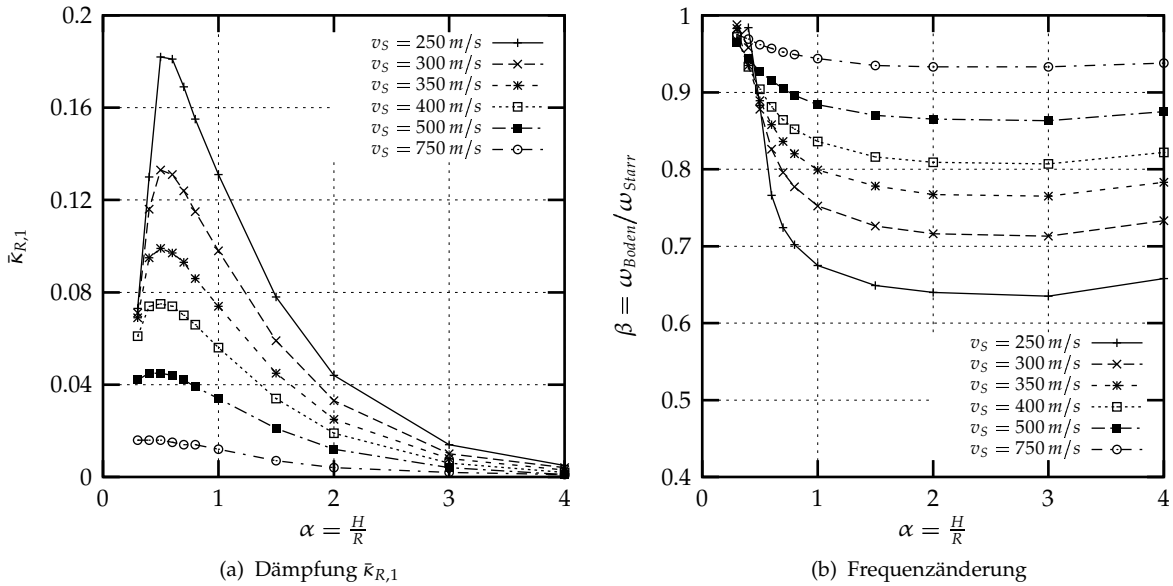


Abb. 5.9: Dynamische Kenngrößen des ersten Modus der impulsiven horizontalen Interaktions-schwingung des Ersatzsystems bei flexiblem Kreisplattenfundament mit $\delta = 10^{-6}$.

2. Ermittlung der Spektralwerte S_a in Abhängigkeit von den Eigenfrequenzen und Dämpfungen aus einem entsprechenden Antwortspektrum
3. Berechnung der Druckverteilungen p_L unter Verwendung der normierten Druckverteilungen \bar{p}_L nach Kapitel 2 für jeden Mode des äquivalenten Ersatzsystems
4. Überlagerung der modalen Druckverteilungen nach Abschnitt 5.3

5.3.2 Überlagerung der maximalen modalen Antwortgrößen

Bei der Antwortspektrenmethode werden die Maximalantworten der Modes verwendet, und der zeitliche Bezug zwischen ihnen geht verloren. Es ist deshalb erforderlich, für die Überlagerung der einzelnen modalen Maximalantworten eine Möglichkeit zu finden, die weder zu kleine Antwortgrößen liefert, noch die Beanspruchung des Behälters zu sehr überschätzt. In der Literatur sind Überlagerungsregeln zu verschiedenen dynamischen Systemen vorhanden. Es können insbesondere folgende Superpositionsregeln angegeben werden (s.a. Seeber [60]):

1. Absolute Sum of Modal Maxima Superposition
2. Square Root of the Sum of Modal Maxima Squared Superposition (SRSS)
3. Double Sum Modal Maxima Superposition (DS)
4. Complete Quadratic Combination of Modal Maxima (CQC)
5. Ten Percent Modal maxima Superposition (TEN%)

Die erste Methode liegt mit der Addition der modalen Maxima immer auf der "sicheren Seite", liefert aber oft zu große Antwortgrößen. Die SRSS-Überlagerung kann angewendet werden, wenn die Eigenfrequenzen genügend weit auseinander liegen. Liegen die Eigenfrequenzen eng

beieinander, so liefert diese Methode zu geringe Werte. Die anderen Überlagerungsmethoden berücksichtigen den letztgenannten Fall, daß die Eigenfrequenzen eng beieinanderliegen. Anhand von Zeitverlaufsberechnungen an konkreten Erdbeben konnten die nachfolgend angegebenen Überlagerungsregeln gefunden werden.

Eindimensionale horizontale seismische Anregung

Für die Überlagerung der Druckanteile aus horizontaler Anregung an der Behälterwand ist die folgende Vorschrift anzuwenden:

$$p_H(\xi, \varphi) = \rho_L R \sqrt{(\bar{p}_{SL}(\xi) S_{a,SL})^2 + \left(\sum_{n=1}^4 \bar{p}_{DH,n}(\xi) S_{a,DH,n} \right)^2} \cos \varphi \quad (5.6)$$

Die normierten Druckverteilungen \bar{p}_{SL} bzw. $\bar{p}_{DH,n}$ sind mit den Angaben aus *Kapitel 2* zu bestimmen. Für die Schwappschwingung wird nur der erste Mode berücksichtigt, da die höheren Modes nur sehr geringe Beiträge zu den Druckverteilungen liefern.

Die resultierende horizontale Kraft bzw. das resultierende Umsturzmoment infolge des Drucks auf die Behälterwand können analog zu Glg. 5.6 bestimmt werden:

$$F_H = \sqrt{(M_{SL} S_{a,SL})^2 + \left(\sum_{n=1}^4 M_{DH,n} S_{a,DH,n} \right)^2} \quad (5.7)$$

$$MM = \sqrt{(MM_{SL} S_{a,SL})^2 + \left(\sum_{n=1}^4 MM_{DH,n} S_{a,DH,n} \right)^2} \quad (5.8)$$

Zweidimensionale horizontale seismische Anregung

Im Entwurf des Eurocode 8, Part 4 [14] wird nur die Berücksichtigung einer horizontalen Komponente gefordert. Bei der tatsächlich auftretenden zweidimensionalen horizontalen Anregung können über den Umfang größere Druckverteilungen auftreten als bei Beachtung von nur einer Anregungsrichtung. Von Scharf [54] wird vorgeschlagen, aus den maximalen Druckverteilungen für die jeweilige Anregungsrichtung (Nord-Süd bzw. Ost-West) eine maximale antimetrische Druckverteilung über die Behälterhöhe zu bilden. Der Druck wird nach Glg. 5.9 ermittelt.

$$p_H(\xi, \varphi) = \sqrt{p_{H,NS}^2(\xi) + p_{H,OW}^2(\xi)} \cos \varphi \quad (5.9)$$

Dabei wird nicht berücksichtigt, daß der Winkel φ der maximalen Druckkoordinaten sich mit der Höhe ξ ändert. Die resultierenden horizontalen Kräfte und Umsturzmomente werden analog zu den Druckverteilungen ermittelt:

$$F_H = \sqrt{F_{H,NS}^2 + F_{H,OW}^2} \quad (5.10)$$

$$MM = \sqrt{MM_{NS}^2 + MM_{OW}^2} \quad (5.11)$$

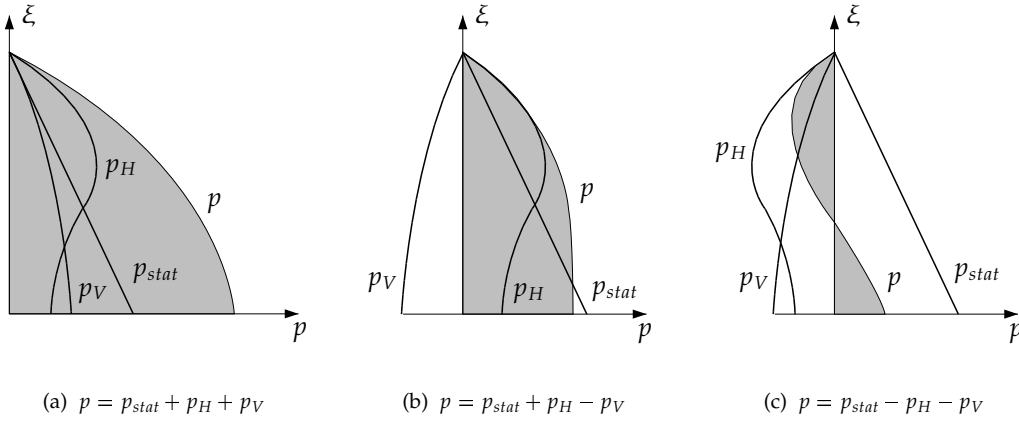


Abb. 5.10: Überlagerung der Druckanteile.

Vertikale seismische Anregung

Für die Drücke an der Behälterwand infolge vertikaler Anregung ist die folgende Überlagerungsregel anzuwenden:

$$p_V(\xi, \varphi) = \rho_L H \sqrt{\sum_{n=1}^4 (\bar{p}_{DV,n}(\xi) S_{a,DV,n})^2} \quad (5.12)$$

Die absolute Spektralbeschleunigung $S_{a,DV,1}$ des ersten Modes ist unter Berücksichtigung der Abstrahlungsdämpfung und der Frequenzänderung nach *Abschnitt 5.2* aus einem entsprechenden Bemessungsspektrum zu ermitteln. Alle anderen Größen bleiben gegenüber dem starr gelagerten Behälter unverändert.

Für die Überlagerung der Modes zur Bestimmung der Kraft auf den Behälterboden ergibt sich analog zu Glg. 5.13 die folgende Beziehung:

$$F_V = \sqrt{\sum_{n=1}^4 (M_{DV,n} S_{a,DV,n})^2} \quad (5.13)$$

Überlagerung der Antwortgrößen infolge vertikaler und horizontaler Anregung

Entsprechend den Angaben von Scharf [54] ist es möglich, daß die maximalen Drücke infolge vertikaler und horizontaler Anregung gleichzeitig auftreten. Es ist deshalb erforderlich, die maximalen vertikalen und horizontalen Druckverteilungen entsprechend der Abb. 5.10 zu überlagern. Damit kann auch eine Differenzierung hinsichtlich der möglichen Versagensarten vorgenommen werden.

Der Berechnungsablauf des vorgeschlagenen Ingenieurverfahrens zur Ermittlung der Antwortgrößen bei seismischen Einwirkungen ist in der Abb. 5.11 dargestellt.

5.3.3 Bemessungsschnittgrößen

Als Bemessungsschnittgrößen sind die Schnittgrößen des ungestörten Membranzustandes unter Vernachlässigung von Biegespannungen zu verwenden. Die nachfolgend angegebenen Bemes-

sungsformeln sind für diese Schnittgrößen abgeleitet worden.

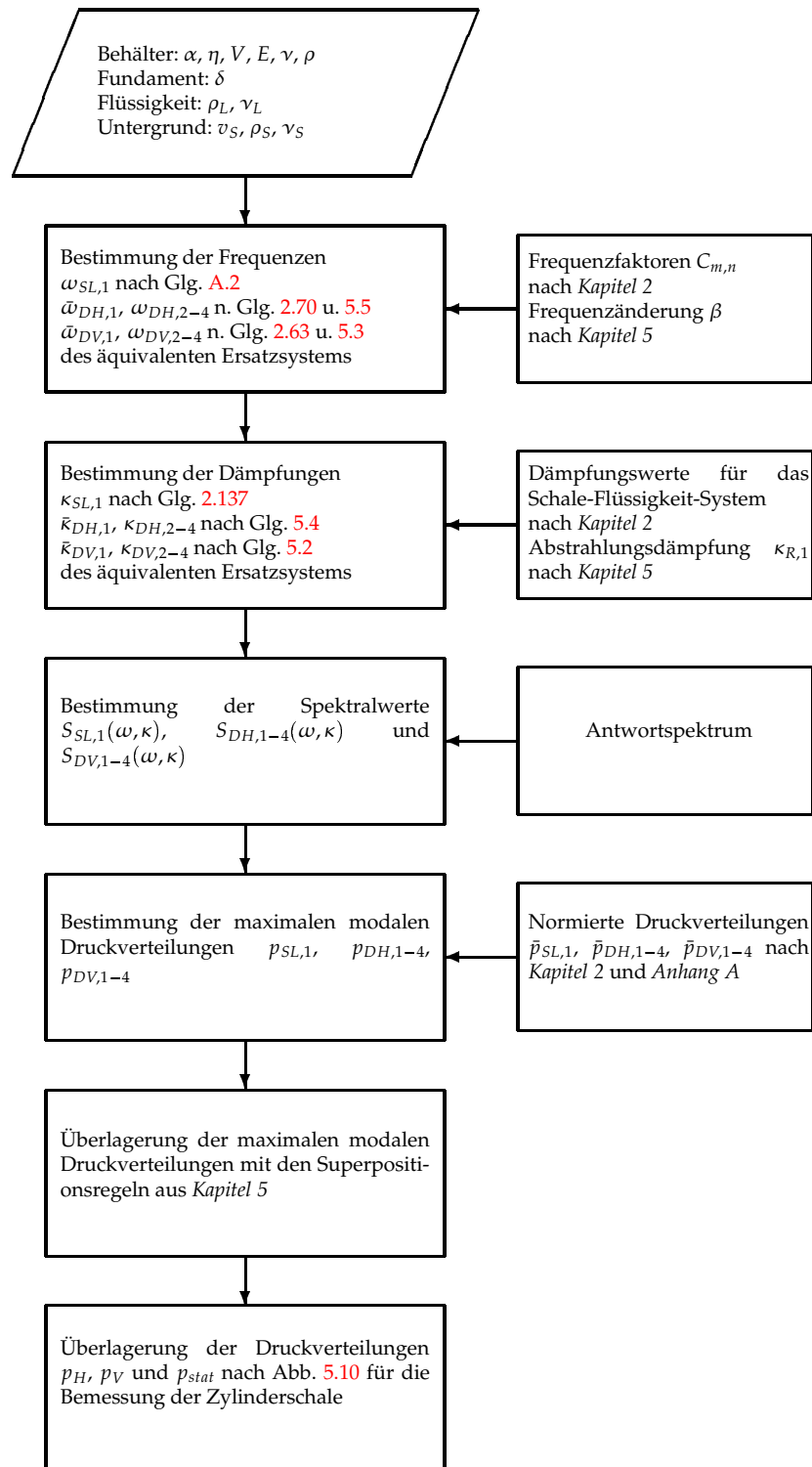


Abb. 5.11: Berechnungsablauf des Ingenieurverfahrens zur Bestimmung der Antwortgrößen unter seismischen Einwirkungen.

5.4 Bemessung der Behälterschale

Im folgenden werden Nachweisformeln für die Mantelbleche von metallischen Behältertragwerken angegeben. Ausschnitte in den Mantelblechen (Rohrlöcher, Mannstutzen) sind gesondert zu berücksichtigen. Für die Verbindungen (Schweißnähte) der Mantelbleche sind ebenfalls zusätzliche Nachweise erforderlich. Weiterhin sind für andere Bauelemente des Behältertragwerks (Boden und Bodenecke, Aussteifung, Dach, Gründung) weitere Nachweise notwendig. Für diese Bauelemente wird auf die Beachtung der folgenden Vorschriften und Richtlinien hingewiesen:

a) Deutsche Vorschriften

- DIN 4119 Teil 1 und 2: Oberirdische zylindrische Flachboden-Tankbauwerke aus metallischen Werkstoffen [9]
- DIN 18800 Teil 1: Stahlbauten - Konstruktion und Bemessung [10]
- DIN 18800 Teil 4: Stahlbauten - Stabilitätsfälle, Schalenbeulen [11]

b) Europäische Vorschriften

- Eurocode 8, Part 1: Design of Structures for Earthquake Resistance - General rules [13]
- Eurocode 8, Part 4: Design of Structures for Earthquake Resistance - Silos, Tanks and Pipelines [14]

c) US-Amerikanische Vorschriften und Richtlinien

- API Standard 620: Recommended Rules for Design and Construction of Large, Welded, Low-Pressure Storage Tanks [3]
- API Standard 650: Welded Steel Tanks for Oil Storage [2]
- American Water Works Association: AWWA Standards for Welded Steel Tanks for Water Storage [4]
- American Society of Civil Engineers: Guidelines for the Seismic Design of Oil and Gas Pipeline Systems [20]

Für die Mantelbleche sind Nachweise hinsichtlich Festigkeits- und Stabilitätsversagen erforderlich.

Stabilitätsversagen

In bezug auf das Stabilitätsversagen der Behälterschale sind das *elasto-plastische Beulen* und das *elastische Manteldruckbeulen* zu berücksichtigen. Für den Nachweis hinsichtlich *elasto-plastisches Beulen* ist eine Überlagerung der Druckanteile nach Abb. 5.10(a) vorzunehmen. Bei dieser Druckkombination entstehen die größten Ringzug- und Axialdruckkräfte in der Schale bei $\varphi = 0$. Der Nachweis auf *elastisches Manteldruckbeulen* wird mit der Drucküberlagerung nach Abb. 5.10(c) geführt. Dabei können im oberen Schalenbereich Unterdrücke bei $\varphi = 0$ auftreten. Für die Bemessung sind die in den Glg. 5.14, 5.15 und 5.16 angegebenen kritischen Schnittkräfte zu verwenden. Sie sind mit den nach der Membrantheorie ermittelten Schalenschnittkräften zu vergleichen. Weitere Angaben zur Durchführung der Stabilitätsnachweise von seismisch beanspruchten Flüssigkeitsbehältern sind in der Arbeit von Seiler [61] zu finden.

- *elasto-plastisches Beulen* Grenztragfähigkeit:

$$n_{z,krit} = 1.4 \cdot 0.605 \frac{Ed^2}{R} \left\{ 1 - \left[\frac{R \left(p_{stat} + \frac{0.64}{1.4} p_H + \frac{1.0}{1.4} p_V \right)}{f_y d} \right]^2 \right\} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{1.12 + s^{1.5}} \right) \left(\frac{\frac{f_v}{250} + s}{1 + s} \right) \quad (5.14)$$

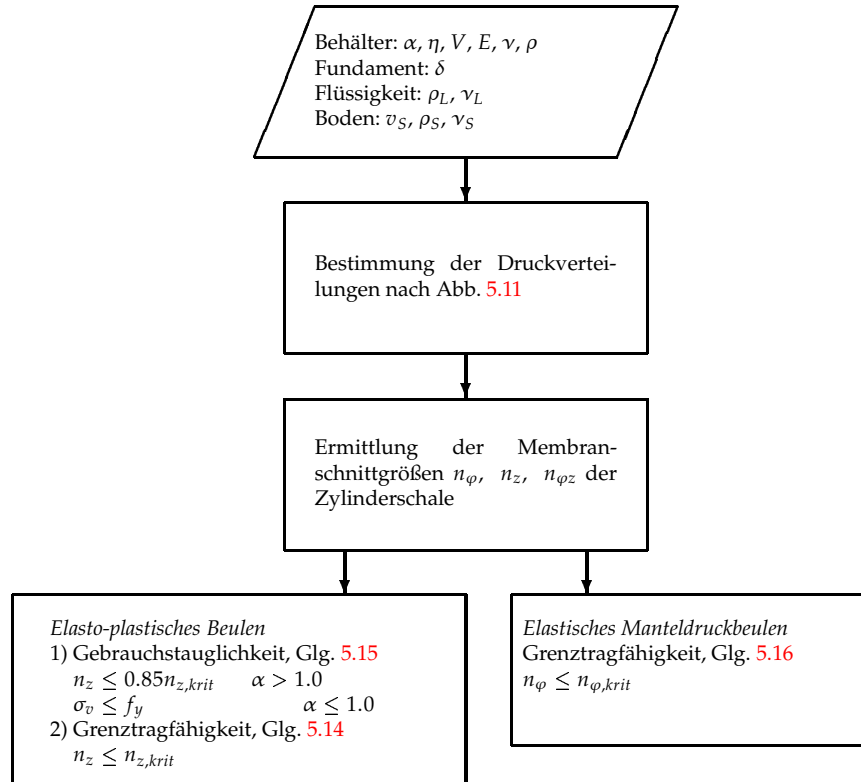


Abb. 5.12: Ablaufschema für den Stabilitätsnachweis der Zylinderschale (nach Seiler [61]).

mit:

$$s = \frac{R}{400d}$$

- *elasto-plastisches Beulen* Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit:

$$\begin{aligned} \sqrt{n_\varphi^2 + n_z^2 - n_\varphi n_z} &\leq f_y d && \text{für } \alpha \leq 1.0 \\ n_z &\leq 0.85 n_{z,krit} && \text{für } \alpha > 1.0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

- *elastisches Manteldruckbeulen* Grenztragfähigkeit:

$$n_{\varphi,krit} = \frac{0.92}{0.75} C_\varphi E \frac{R}{H} \left(\frac{d}{R} \right)^{1.5} \quad (5.16)$$

Der Beiwert C_φ in Glg. 5.16 ist von der Dachkonstruktion abhängig. Für Festdachkonstruktionen kann $C_\varphi = 1.0$ gesetzt werden.

Festigkeitsversagen

Gegenüber Festigkeitsversagen der Behälterschale ist ein Vergleichsspannungsnachweis zu führen. Dazu ist die folgende Glg. 5.17 anzuwenden.

$$\sqrt{n_\varphi^2 + n_z^2 - n_\varphi n_z + 3n_{\varphi z}^2} \leq f_y \quad (5.17)$$

5.5 Anwendungsbeispiel

Es werden drei Behälter mit unterschiedlicher Schlankheit α aber einheitlichem Flüssigkeitsvolumen $V = 19200\text{m}^3$ untersucht. Für diese Behälter werden die Druckverteilungen mit dem gekoppelten Gesamtsystem nach Kapitel 4 und dem äquivalenten Ersatzsystem dieses Kapitels ermittelt. Anhand der Angaben aus Abschnitt 5.4 wird die Bemessung der Behälterwand durchgeführt.

In der Tab. 5.1 sind die Parameter für den Behälter, die Flüssigkeit und den Untergrund angegeben.

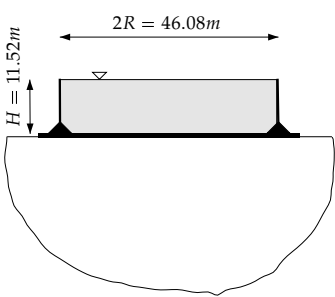
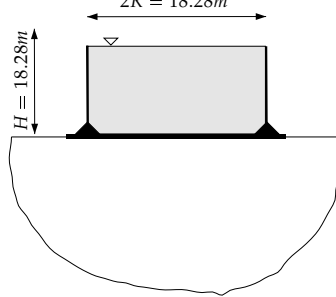
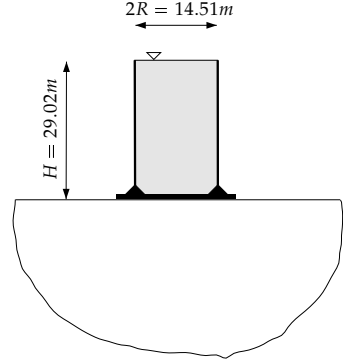
Für die Behälter werden mit zunehmender Schlankheit die Bezeichnungen M1, M4 und M5 verwendet. Es wird eine konstante Wanddicke angenommen. Eine veränderliche Wanddicke kann nach den Angaben von Kapitel 2 berücksichtigt werden. Für die Behälterwand wird Stahl verwendet. Die Materialdämpfung beträgt $\kappa = 0.02$.

Eine Festdachkonstruktion ist nicht vorhanden. Die Behälter können ein Schwimmdach besitzen.

Die Steifigkeit des Bodenblechs beträgt $\delta = 10^{-6}$. Das entspricht der für Behältergründungen üblichen Größenordnung (s.a. [63]).

Der Untergrund wird als elastischer ungeschichteter Halbraum mit einer Scherwellengeschwindigkeit von $v_s = 250\text{m/s}$ angesehen. Die Materialdämpfung beträgt $\kappa_s = 0.05$.

Die Flüssigkeit besitzt in dem Beispiel eine kinematische Viskosität ν_L von $4.2 \cdot 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$. Das

Bezeichnungen		
M1	M4	M5
Behälterschlankheit $\alpha = H/R$		
0.5	1.0	2.0
Abmessungen		
		
Volumen:	19200m^3	
Wandstärke:	$R/d = 1000$	
Schalenmaterial:	$E = 2.1 \cdot 10^{11}\text{N/mm}^2, \nu = 0.3, \rho = 7.85\text{t/m}^3, f_y = 500\text{N/mm}^2, \kappa = 0.02$	
unterer Rand:	eingespannt	
oberer Rand:	frei	
Bodenplatte:	$\delta = 10^{-6}$	
Flüssigkeit:	$\rho_L = 1.0\text{t/m}^3, \nu_L = 4.2 \cdot 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$	
Untergrund:	$v_s = 250\text{m/s}, \rho_s = 1.90\text{t/m}^3, \nu_s = 1/3, \kappa_s = 0.05$	

Tab. 5.1: Parameter für das Anwendungsbeispiel.

Bezeichnungen		
M1	M4	M5
Eigenfrequenzen des Schale-Flüssigkeit-Systems für die 0. Umfangsharmonische (Glg. 2.63)		
$\omega_{0,1} = 33.456$	25.202	17.124
$\omega_{0,2} = 61.927$	52.367	42.429
$\omega_{0,3} = 81.035$	69.300	58.726
$\omega_{0,4} = 97.336$	82.922	71.202
Eigenfrequenz des äquivalenten Ersatzsystems bei Berücksichtigung des Untergrundes (Glg. 5.2) 0. Umfangsharmonische, 1. Biegemode		
$\bar{\omega}_{0,1} = 33.690$	23.514	15.240
Eigenfrequenzen des Schale-Flüssigkeit-Systems für die 1. Umfangsharmonische (Glg. 2.70)		
$\omega_{1,1} = 32.287$	24.757	15.969
$\omega_{1,2} = 57.928$	46.969	37.784
$\omega_{1,3} = 76.608$	65.869	53.807
$\omega_{1,4} = 96.771$	81.601	68.100
Eigenfrequenz des äquivalenten Ersatzsystems bei Berücksichtigung des Untergrundes (Glg. 5.5) 1. Umfangsharmonische, 1. Biegemode		
$\bar{\omega}_{1,1} = 28.509$	16.711	10.220
Eigenfrequenz Schwappschwingung (Glg. A.2)		
$\omega_{SL,1} = 0.7545$	0.9690	1.1149

Tab. 5.2: Eigenfrequenzen ω in rad/s .

entspricht z.B. der Ölsorte SAE 30.

Als Erdbebeneinwirkung werden die Zeitverläufe der vertikalen und der Ost-West-Komponente des *Erzincan-Bebens* 1992 nach Abb. 4.20 verwendet.

Dynamische Eigenschaften

Mit den Angaben des *Kapitels* 2 werden die Eigenfrequenzen des Behälter-Flüssigkeit-Systems für die 0. und 1. Umfangsharmonische und den 1. bis 4. Biegemode sowie für den 1. Mode der Schwappschwingung der Flüssigkeitsoberfläche in der 1. Umfangsharmonischen berechnet. Die Ergebnisse sind in der Tab. 5.2 in den Zeilen 2, 4 und 6 angegeben.

Mit den Angaben des *Kapitels* 5 werden die Eigenfrequenzen des äquivalenten Ersatzsystems für die vertikale und horizontale Erdbebenanregung ermittelt. Damit kann der Einfluß des Untergrundes auf die Eigenfrequenzen näherungsweise erfaßt werden. Die entsprechenden Ergebnisse sind in den Zeilen 3 und 5 der Tab. 5.2 angegeben.

Die zur Berücksichtigung des Untergrundes erforderlichen Dämpfungswerte des Ersatzsystems sind in Tab. 5.3 dargestellt. Sie wurden mit den Angaben aus *Abschnitt* 5.2 ermittelt.

Spektralwerte der absoluten Beschleunigungen

Für die Erdbebenzeitverläufe nach Abb. 4.20 werden die Antwortspektren der absoluten Beschleunigungen für die Dämpfungswerte der Tab. 5.3 ermittelt. Sie sind in Abb. 5.13 dargestellt.

Mit den Eigenfrequenzen können aus den Antwortspektren die Beschleunigungswerte für den jeweiligen Mode abgelesen werden. Die Werte sind in der Tab. 5.4 zusammengefaßt.

Bezeichnungen		
M1	M4	M5
0. Umfangsharmonische, 1. Biegemode (Glg. 5.2)		
$\bar{\kappa}_{0,1} = 0.101$	0.166	0.110
höhere Biegemodes bleiben unverändert: $\bar{\kappa}_{0,2-4} = \kappa_{0,2-4} = 0.02$		
1. Umfangsharmonische, 1. Biegemode (Glg. 5.4)		
$\bar{\kappa}_{1,1} = 0.206$	0.153	0.067
höhere Biegemodes bleiben unverändert: $\bar{\kappa}_{1,2-4} = \kappa_{1,2-4} = 0.02$		
Schwappschwingung (Glg. 2.138)		
$\bar{\kappa}_{1,1} = \kappa_{1,1} = 0.0017 \approx 0.002$	0.0015 \approx 0.002	0.0016 \approx 0.002

Tab. 5.3: Dämpfungen des äquivalenten Ersatzsystems.

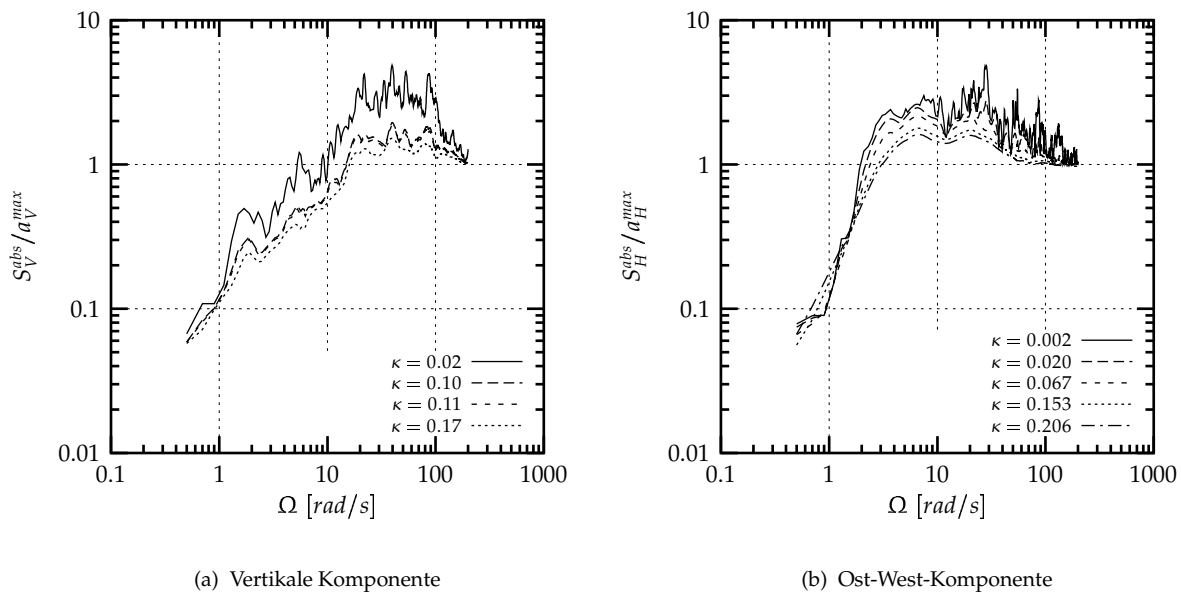


Abb. 5.13: Antwortspektren für die Zeitverläufe nach Abb. 4.20 bezogen auf die maximale, absolute Freifeldbeschleunigung.

Antwortgrößen der Behälter

Mit den normierten Druckverteilungen aus Kapitel 2 können unter Verwendung der absoluten Spektralbeschleunigungen die tatsächlichen Druckverteilungen für die einzelnen Modes bestimmt werden.

Die Überlagerung der modalen Druckverteilungen erfolgt nach den Angaben aus Abschnitt 5.3.

In den Abb. 5.14 und 5.15 sind die resultierenden Druckverteilungen bei vertikaler und horizontaler Anregung dargestellt. Neben den Druckverteilungen, die mit dem äquivalenten Ersatzsystem ermittelt wurden, sind auch diejenigen angegeben, die sich mit dem gekoppelten Gesamtsystem nach Kapitel 4 ergeben.

Für das gekoppelte Gesamtsystem wird für jeden Zeitpunkt des Erdbebens eine Druckverteilung ermittelt. Es ist dabei möglich, die auftretenden Druckverteilungen hinsichtlich der maximalen

Bezeichnungen		
M1	M4	M5
absolute Spektralbeschleunigung 0. Umfangsharmonische [m/s^2]		
$S_{a,V,1}(\bar{\omega}_{0,1}, \bar{\kappa}_{0,1}) = 3.2124$	3.2095	2.4679
$S_{a,V,2}(\bar{\omega}_{0,2}, \bar{\kappa}_{0,2}) = 6.4573$	9.8542	7.2457
$S_{a,V,3}(\bar{\omega}_{0,3}, \bar{\kappa}_{0,3}) = 5.8009$	6.5933	7.2128
$S_{a,V,4}(\bar{\omega}_{0,4}, \bar{\kappa}_{0,4}) = 6.6126$	8.1670	6.2692
absolute Spektralbeschleunigung 1. Umfangsharmonische [m/s^2]		
$S_{a,H,1}(\bar{\omega}_{1,1}, \bar{\kappa}_{1,1}) = 5.6412$	6.4429	7.0773
$S_{a,H,2}(\bar{\omega}_{1,2}, \bar{\kappa}_{1,2}) = 5.4140$	5.1734	5.5312
$S_{a,H,3}(\bar{\omega}_{1,3}, \bar{\kappa}_{1,3}) = 4.8497$	5.8275	5.7695
$S_{a,H,4}(\bar{\omega}_{1,4}, \bar{\kappa}_{1,4}) = 4.8341$	5.3298	5.3796
absolute Spektralbeschleunigung der Schwappschwingung [m/s^2]		
$S_{a,SL,1}(\bar{\omega}_{SL,1}, \bar{\kappa}_{SL,1}) = 0.3450$	0.4226	0.6027

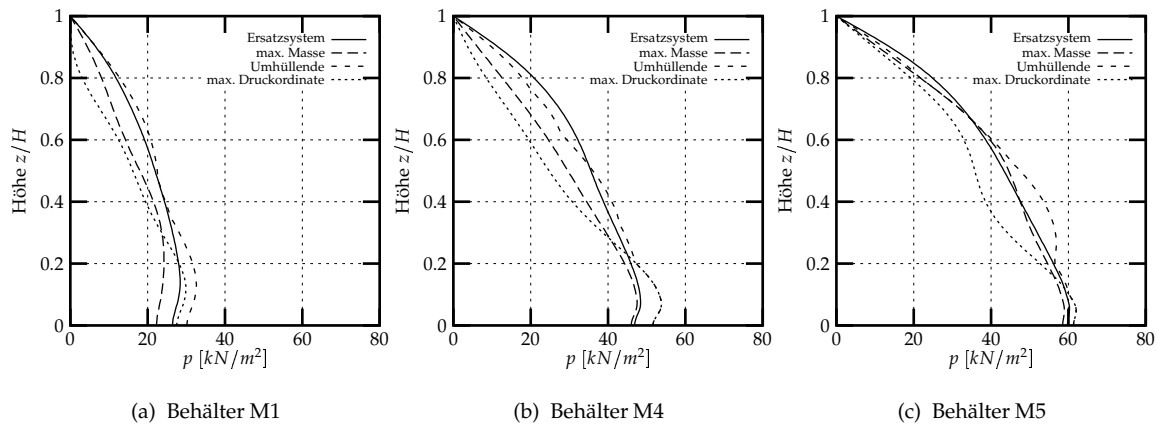
Tab. 5.4: Absolute Spektralbeschleunigungen für das äquivalente Ersatzsystem in m/s^2 .

Abb. 5.14: Vertikale Druckkomponenten: Ersatzsystem und gekoppeltes System.

absoluten Druckordinate, der maximalen aktivierten Flüssigkeitsmasse (maximale resultierende Kraft) und des maximalen Umsturzmoments auszuwerten.

Die Ergebnisse in Abb. 5.14 und 5.15 zeigen, daß die Antwortgrößen für die Behälter M4 und M5 (Schlankheiten $\alpha = 1.0$ und 2.0) etwas überschätzt werden. Für den gedrungenen Behälter liefern die Überlagerungsregeln nach Abschnitt 5.3 etwas zu geringe Antwortgrößen.

Für die Bemessung der Behälterwand ist eine Überlagerung der statischen sowie der vertikalen und horizontalen dynamischen Druckkomponenten nach Abb. 5.10 vorzunehmen (Abb. 5.16).

Bemessung der Behälterwand

Aus den überlagerten Druckkomponenten können die Membranschnittgrößen der Zylinderschale bestimmt werden, mit denen die Bemessung der Behälterwand durchzuführen ist.

Dazu werden die kritischen Schnittgrößen nach den Bemessungsformeln von Seiler [61] bestimmt. Mit ihnen können Auslastungsgrade der Zylinderschale ermittelt werden. Sie sind in Abb. 5.17 über die Behälterhöhe dargestellt.

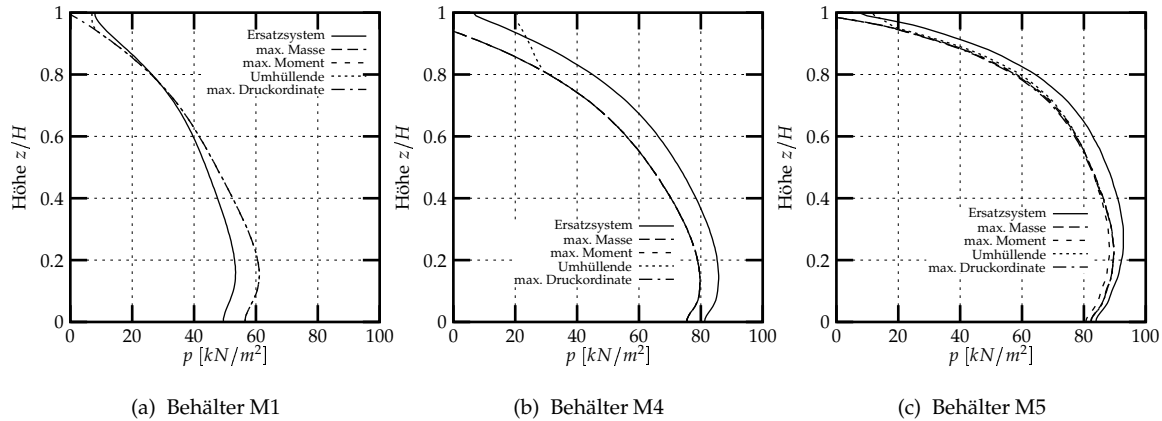


Abb. 5.15: Horizontale Druckkomponenten: Ersatzsystem und gekoppeltes System.

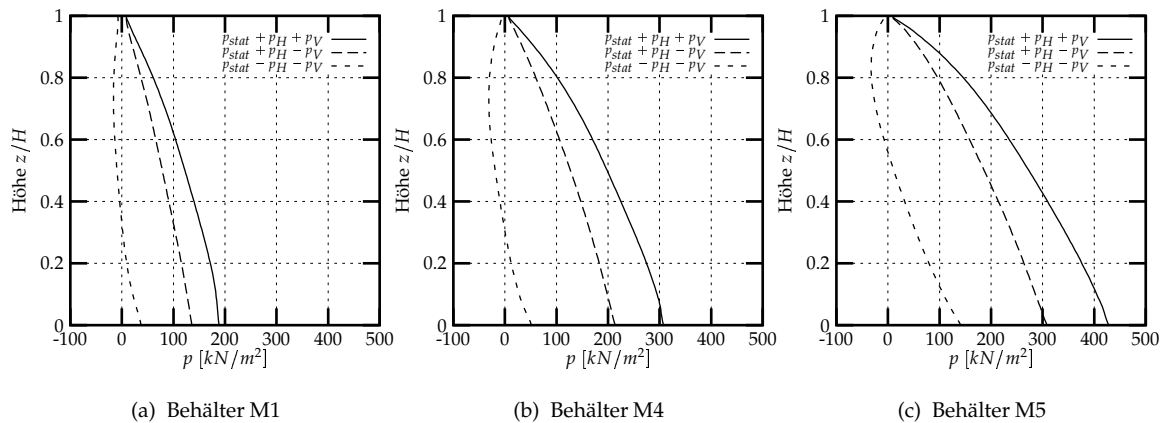


Abb. 5.16: Überlagerung der statischen, vertikalen und horizontalen Druckkomponenten des Ersatzsystems.

5.6 Zusammenfassung

Für die Berechnung von seismisch beanspruchten Flüssigkeitsbehältern im Rahmen eines Ingenieurverfahrens ist es zweckmäßig, die Antwortspektrenmethode anwenden zu können. Aufgrund der unterschiedlichen Dämpfungen der Teilsysteme ist die Durchführung der dazu erforderlichen modalen Zerlegung des gekoppelten Gesamtsystems sehr aufwendig. Durch eine näherungsweise "Entkopplung" der Bewegungsgleichung kann ein äquivalentes Ersatzsystem abgeleitet werden. Mit diesem ist eine Berechnung nach der Antwortspektrenmethode möglich.

Um mit dem äquivalenten Ersatzsystem die Interaktion mit dem Untergrund berücksichtigen zu können, müssen für den ersten Mode der impulsiven Komponente der Interaktionsschwingung die Frequenz- und Dämpfungswerte des Ersatzsystems berechnet werden. Es kann gezeigt werden, daß die höheren Modes der impulsiven Interaktionsschwingung und der Schwappschwingung durch die Interaktion mit dem Untergrund kaum beeinflußt werden. Für diese Modes werden für das Ersatzsystem deshalb die gleichen Frequenzen und Dämpfungen wie für das starr gelagerte Behälter-Flüssigkeit-System verwendet.

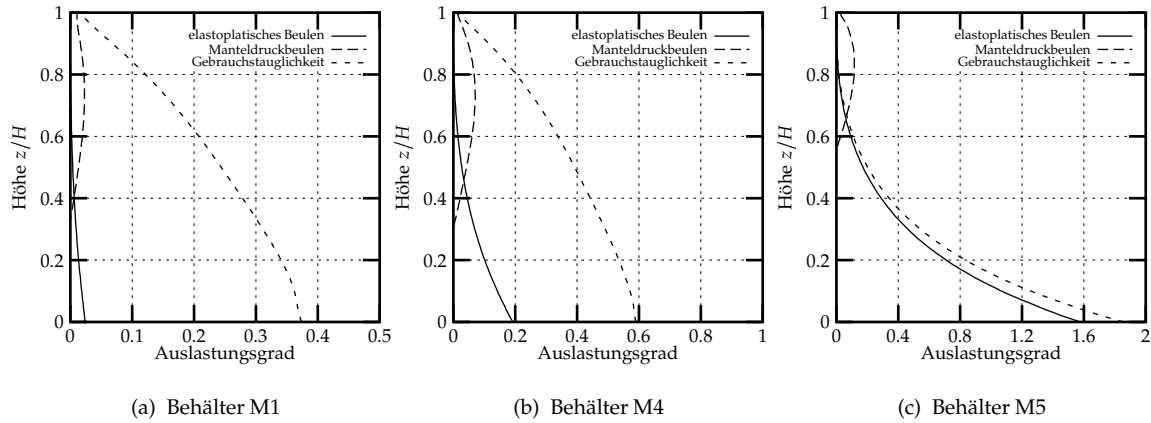


Abb. 5.17: Auslastungsgrade der Zylinderschale hinsichtlich elastoplastischen Beulens (Glg. 5.14), elastischen Manteldruckbeulens (Glg. 5.16) und der Festigkeit (Glg. 5.15, 5.17).

Zur Bestimmung der Kennwerte des äquivalenten Ersatzsystems bei Berücksichtigung der Flexibilität der Behältergründung wird eine Parameteruntersuchung durchgeführt. Der Einfluß der flexiblen Gründung auf die Kenngrößen des Ersatzsystems wird untersucht. Es werden Regeln für Überlagerung der Abstrahlungsdämpfung mit der Materialdämpfung von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund sowie die Überlagerung der maximalen modalen Antwortgrößen zur Anwendung der Antwortspektrenmethode angegeben. Der dargestellte Berechnungsablauf erlaubt eine Ermittlung der für die Bemessung relevanten Druckverteilungen im Rahmen eines Ingenieurverfahrens. Die für eine Bemessung der Behälterwand hinsichtlich Erdbeben erforderlichen Nachweise werden dargestellt.

6 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Zur Berechnung der Interaktion von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund werden in der Baupraxis vorwiegend **Ingenieurverfahren** angewendet. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß die ihnen zugrunde liegenden mechanischen Modelle nur wenige Freiheitsgrade besitzen. Daraus ergeben sich Vorteile für die praktische Anwendung und der Kompatibilität zu den Erdbebennormen (Eurocode 8, Part 4 [14], API 650 [2]) gegenüber **numerischen Berechnungsverfahren**.

In jüngster Vergangenheit aufgetretene Schäden an Behältertragwerken infolge von Erdbebeneinwirkungen verdeutlichen, daß die Ingenieurverfahren nicht in jedem Fall das Antwortverhalten realistisch erfassen können. Insbesondere werden die folgenden Einflüsse auf die Interaktionsvorgänge nicht berücksichtigt:

- Einfluß der Flüssigkeitskompressibilität und -viskosität auf die Interaktion von Behälter und Flüssigkeit
- Einfluß der Gründungsflexibilität auf die Interaktion von Behälterfundament und Untergrund.

Um die genannten Einflüsse in ein Ingenieurverfahren einzubeziehen, wird das von Veletsos und Tang [72, 74] entwickelte mechanische Modell zur Behandlung der Interaktion von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund verwendet. Dieses mechanische Modell basiert auf der **Substrukturmethode**, die die Behandlung der folgenden drei Schritte erfordert:

1. Bildung der Teilsysteme Behälter-Flüssigkeit und Fundament-Untergrund
2. Analyse der Teilsysteme durch:
 - a) die modale Analyse des Behälter-Flüssigkeit-Systems
 - b) die Untersuchung des frequenzabhängigen Verhaltens des Fundament-Untergrund-Systems
3. Kopplung der Teilsysteme zum Gesamtsystem

Für die Berechnung im Rahmen eines Ingenieurverfahrens ist es zweckmäßig, die Antwortspektrenmethode anwenden zu können. Dazu ist eine modale Zerlegung der Bewegungsgleichungen des gekoppelten Gesamtsystems von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund notwendig. Aufgrund der unterschiedlichen Dämpfungen der Teilsysteme ist diese nur schwer durchzuführen. Es wird deshalb das vereinfachte mechanische Modell des **äquivalenten Ersatzsystems** von Veletsos und Tang [72, 74] verwendet, um eine näherungsweise Entkopplung des Gesamtsystems zu ermöglichen. Das damit verbundene Ingenieurverfahren besitzt den bisher höchsten Entwicklungsstand und seine Anwendung wird im Eurocode 8, Teil 4, Appendix A [14] empfohlen.

Interaktion von Behälter und Flüssigkeit

Interaktion von Behälter und inkompressibler reibungsfreier Flüssigkeit Das dynamische Eigenwertproblem der flüssigkeitsgefüllten Kreiszyinderschale wird als **Integralgleichung** for-

muliert. Die Flüssigkeit wird dafür als zusätzliche Belastung auf die Schale aufgebracht. Zur Aufstellung der Integralgleichung ist die Kenntnis der Einflußfunktionen (Greensche Funktionen) der Schale bei statischer Belastung notwendig. Für den bei verankerten Behälterbauwerken repräsentativen Fall einer am unteren Rand eingespannten Zylinderschale mit freiem oberem Rand und konstanter Wandstärke werden die erforderlichen Einflußfunktionen unter Verwendung der vereinfachten Schalengleichungen von Flügge [19] für die 0. und 1. Umfangsharmonische ermittelt.

Durch **schrittweise Näherung** werden die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Integralgleichung bestimmt. Durchgeführte Parameterstudien ermöglichen den Vergleich der Ergebnisse mit denen anderer Autoren sowie denen aus Finite-Elemente-Berechnungen. Es kann gezeigt werden, daß mit dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen Verfahren die modale Analyse effizient durchgeführt werden kann. Weiterhin kann begründet werden, daß:

- die Kopplung der Schalenbewegungen in axialer, radialer und Umfangsrichtung und
- die Trägheitskräfte der Schale für Stahlbehälter üblicher Geometrie

von untergeordneter Bedeutung sind und damit vernachlässigt werden können.

Aufgrund der Zulässigkeit der Vernachlässigung der Trägheitskräfte der Schale läßt sich die Integralgleichung in eine besonders einfach zu lösende Form überführen. Das Eigenwertproblem der flüssigkeitsgefüllten Kreiszyinderschale ist in dieser Form von den folgenden Parametern abhängig:

- Schlankheit $\alpha = H/R$, Radius R bzw. Höhe H , Wanddicke d , Elastizitätsmodul E und Querdehnzahl ν der Schale
- Dichte ρ_L der Flüssigkeit
- Randbedingungen an den Schalenrändern

Die Eigenfrequenzen werden als normierte Größen in bezug auf Elastizitätsmodul und Dichte sowie Radius (0. Umfangsharmonische) bzw. Höhe (1. Umfangsharmonische) des Behälters angegeben. Es ist daraus zu erkennen, daß die Eigenfrequenzen direkt proportional zum Elastizitätsmodul und der Dicke der Schale und indirekt proportional zur Dichte der Flüssigkeit sind. Weiterhin sind die Eigenfrequenzen indirekt proportional zum Schalenradius bzw. zur Schalenhöhe.

Mit denen durch die modale Analyse gewonnenen Eigenwerten und Eigenfunktionen ist es möglich, das Behälter-Flüssigkeit-Kontinuum auf eine Reihe von entkoppelten Einfreiheitsgradschwingern zurückzuführen.

Interaktion von Behälter und kompressibler reibungsfreier Flüssigkeit Der Einfluß der Kompressibilität auf die Interaktion von Schale und Flüssigkeit wird in der Arbeit unter Verwendung der von Fischer [15] angegebenen Lösung für die Gleichungen der kompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit herausgearbeitet. Eine hier vorgenommene Weiterentwicklung dieses Lösungsweges stellt die Bestimmung der Druckverteilungen unter Einbeziehung der "exakten" Eigenfrequenzen der gemeinsamen Schwingung von Schale und Flüssigkeit dar, die auf der Grundlage des entwickelten Verfahrens zur modalen Analyse bestimmt werden.

Es konnte damit gezeigt werden, daß der Einfluß der Flüssigkeitskompressibilität auf die gemeinsame Schwingung von Schale und Flüssigkeit bei üblichen Flüssigkeitseigenschaften und Behälterabmessungen vernachlässigbar ist.

Interaktion von Behälter und inkompressibler reibungsbehafteter Flüssigkeit Aufgrund der Viskosität haftet die Flüssigkeit an der Behälterwand, so daß keine tangentialen Relativgeschwindigkeiten zwischen Flüssigkeit und Wand auftreten. Die daraus resultierende Randbedingung kann mit der Potentialgleichung der Flüssigkeit nicht erfüllt werden.

In der vorliegenden Arbeit wird deshalb vorgeschlagen, die **Potentialströmung der Flüssigkeit mit einer Reibungsströmung zu überlagern**, so daß die tangentiale Relativgeschwindigkeit an der Behälterwand zwischen Flüssigkeit und Wand verschwindet. Diese **zusätzliche Reibungsströmung bewirkt eine Energiedissipation**. Aus dieser Energiedissipation wird ein **Dämpfungsfaktor für die harmonische Schwingung der Flüssigkeit** abgeleitet.

Für den ersten Eigenmode der Schwappschwingung werden Dämpfungsmaße berechnet. In Abhängigkeit von der Flüssigkeitsviskosität und der Behältergeometrie lassen sich folgende Feststellungen treffen:

- Das Dämpfungsmaß nimmt mit zunehmendem Flüssigkeitsvolumen ab, da sich das Verhältnis von Flüssigkeitsoberfläche zu Flüssigkeitsvolumen verringert.
- Mit zunehmender Eigenfrequenz der Schwappschwingung nimmt der Dämpfungsfaktor γ zu; das bedeutet, daß höhere Modes der Schwappschwingung stärker gedämpft sind.

Interaktion von Fundament und Untergrund

Um das frequenzabhängige Verhalten des Fundament-Untergrund-Systems untersuchen zu können, wird in der Arbeit eine Vorgehensweise gewählt, die gegenüber herkömmlichen Methoden folgende Veränderungen beinhaltet:

- Die vertikalen Oberflächenverschiebungen des linear-elastischen Halbraums werden unter einer stationären schlaffen antimetrischen Kreisflächenlast ermittelt.
- Die **Ringmethode** von Lysmer [41] wird auf die antimetrische Lastverteilung erweitert.
- Die Ringmethode wird auf flexible Fundamente angewendet.
- Für Kreisplattenfundamente mit unterschiedlichen Steifigkeiten bei stationärer vertikaler und bei Momentenanregung werden Impedanzfunktionen bestimmt.

Die in der Arbeit entwickelte Methode wird am Beispiel eines Kreisplattenfundaments mit äußerer Ringlast verifiziert. Die Berechnungsergebnisse zeigen, daß sich mit geringer werdender Steifigkeit der Fundamentplatte die Resonanzfrequenz und die Abstrahlungsdämpfung der Gründung verkleinern.

Unter Annahme einer bei Flüssigkeitsbehältern unter Erdbeben auftretenden Lastverteilung am Behälterboden werden **Impedanzfunktionen für flexible Behältergründungen** ermittelt. Das Fundament-Untergrund-Kontinuum wird damit durch frequenzabhängige Feder-Dämpfer-Elemente ersetzt.

Gesamtsystem von Behälter, Flüssigkeit und Untergrund

In Erweiterung der bisherigen Lösung werden die Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems von Flüssigkeitsbehälter und Untergrund unter Berücksichtigung der Kopplung von Horizontal- und Kippbewegung des Fundaments angegeben. Weiterhin werden die unterschiedlichen Materialdämpfungen der Teilsysteme Behälter, Flüssigkeit und Untergrund berücksichtigt.

In einer Parameteruntersuchung werden Übertragungsfunktionen für das Gesamtsystem ermittelt und daraus die zugehörigen Resonanzfrequenzen und modalen Dämpfungen bestimmt. Die Berechnungsergebnisse lassen folgende Aussagen zu:

- Die Resonanzfrequenzen bei horizontaler seismischer Anregung sind von der Flexibilität der Fundamentplatte abhängig; mit zunehmender Flexibilität nehmen die Resonanzfrequenzen ab.
- Die Abstrahlungsdämpfung wird bei horizontaler seismischer Anregung durch die Flexibilität des Fundaments nur bei gedrunenen Behältern beeinflusst; bei einer Behälterschlankheit $H/R < 0.5$ ist eine Abnahme der Dämpfung zu verzeichnen, das heißt, die Reaktionsgrößen werden erhöht.
- Die Fundamentsteifigkeit hat auf die dynamischen Kenngrößen bei vertikaler seismischer Anregung einen vernachlässigbar geringen Einfluß.
- Die Interaktion von Behälter und Untergrund ist von der Behälterschlankheit und der Steifigkeit der Schale abhängig, eine höhere Steifigkeit der Schale vergrößert die Interaktionseffekte.
- Die Interaktion der Schwappschwingung der Flüssigkeit mit dem Untergrund ist von untergeordneter Bedeutung und kann vernachlässigt werden.
- Die Interaktion von Behälter und Untergrund wirkt sich am stärksten für den 1. Mode der gemeinsamen Schwingung von Behälter und Flüssigkeit aus; der Einfluß der Interaktion auf höhere Modes ist gering und kann für das Ingenieurverfahren vernachlässigt werden.
- Die Änderung der Resonanzfrequenz und die Abstrahlungsdämpfung infolge der Interaktion von Behälter und Untergrund sind vom Behältervolumen unabhängig.

Mit den Übertragungsfunktionen werden Zeitverläufe von Antwortgrößen des Behälters für konkrete Erdbeben bestimmt. Durch Vergleiche mit Finite-Elemente-Berechnungen wird die Leistungsfähigkeit des hier vorgeschlagenen Modells nachgewiesen.

Äquivalentes Ersatzsystem

Für das Modell des äquivalenten Ersatzsystems bei dem die Flexibilität der Fundamentplatte berücksichtigt ist, werden im Sinne einer Parameterstudie die Eigenfrequenzen und Dämpfungen ermittelt. Aus dem Vergleich mit Zeitverlaufsrechnungen für Erdbeben werden Regeln für die Überlagerung der modalen Maximalantworten abgeleitet. Die für eine Bemessung der Behälterwand unter Erdbebeneinwirkungen erforderlichen Nachweise werden dargestellt.

Mit den vorgelegten Modellen und Hilfsmitteln ist eine Berechnung und Bemessung von nachgiebig gelagerten Flüssigkeitsbehältern unter seismischen Einwirkungen im Sinne eines Ingenieurverfahrens möglich.

Ausblick

Die Behandlung des Eigenwertproblems von Flüssigkeit und Schale mit der Formulierung als Integralgleichung ist auch bei zusammengesetzten Schalenstrukturen möglich. Damit können eine abgestufte Wandstärke und beliebige rotationssymmetrische Dachkonstruktionen berücksichtigt werden. Mit der Formulierung als Integralgleichung läßt sich ebenfalls das komplexe Eigenwertproblem des gedämpften Schale-Flüssigkeit-Systems darstellen und lösen. Für solche bisher nicht berücksichtigte Fälle ergeben sich Möglichkeiten weiterführender Untersuchungen, die über den Gegenstand der vorliegenden Arbeit hinausgehen.

Für zukünftige Weiterentwicklungen des Ingenieurverfahrens sollte überprüft werden, ob eine exakte Entkopplung der Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems vorteilhaft wäre. Ebenfalls könnte der Einfluß einer nachgiebigen Verankerung oder eines möglichen Abhebens des Behälters zu berücksichtigen sein.

A Spezielle Lösungen für das Flüssigkeitspotential

A.1 Vorbemerkungen

In *Abschnitt 2.2* wurden Lösungsansätze für die Potentialgleichung der reibungsfreien inkompressiblen Flüssigkeit angegeben. Das gesuchte Gesamtpotential der Flüssigkeit Φ muß dabei drei inhomogene Randbedingungen erfüllen. Dazu wurde das Gesamtpotential in drei Teilpotentiale aufgeteilt $\Phi = \sum_{l=1}^3 \Phi_l$, von denen jedes zwei homogene und jeweils eine der inhomogenen Randbedingungen erfüllt.

$$\text{Oberfläche: } \Phi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{1,m,n}(t) \sinh(\varepsilon_n \alpha \xi) J_m(\varepsilon \zeta) \cos(m\varphi) \quad (\text{A.1a})$$

$$\text{Boden: } \Phi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{2,m,n}(t) \cosh(\varepsilon_n \alpha \xi) J_m(\varepsilon \zeta) \cos(m\varphi) \quad (\text{A.1b})$$

$$\text{Wand: } \Phi_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{3,m,n}(t) \cos(\mu_n \xi) I_m\left(\frac{\mu_n}{\alpha} \zeta\right) \cos(m\varphi) \quad (\text{A.1c})$$

Die zeitabhängigen Funktionen $F_{l,m,n}(t)$, $l = 1, 2, 3$ werden aus den inhomogenen Randbedingungen bestimmt, indem diese in eine entsprechende Fourier-Reihe entwickelt werden.

Bei einer flexiblen Behälterwand und einer flexiblen elastisch gebetteten Bodenplatte sind die inhomogenen Randbedingungen der Flüssigkeit an Behälterwand und -boden zunächst unbekannt. In bestimmten Fällen ist es jedoch möglich, die inhomogenen Randbedingungen vorgeben zu können, so z.B. bei:

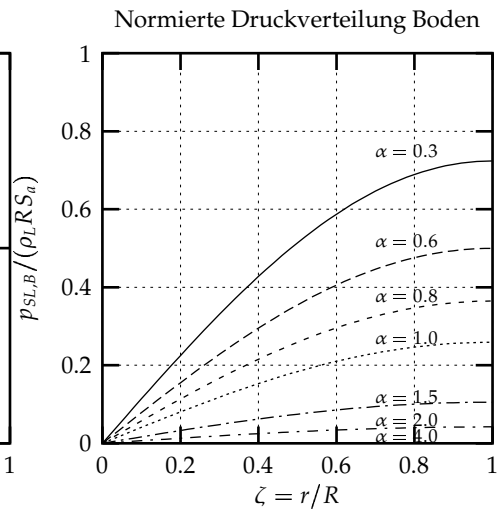
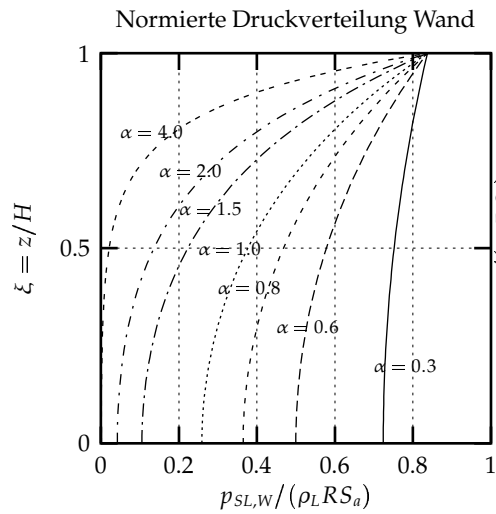
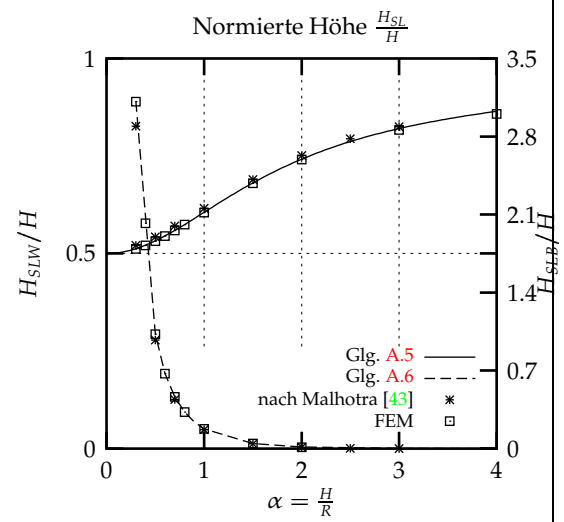
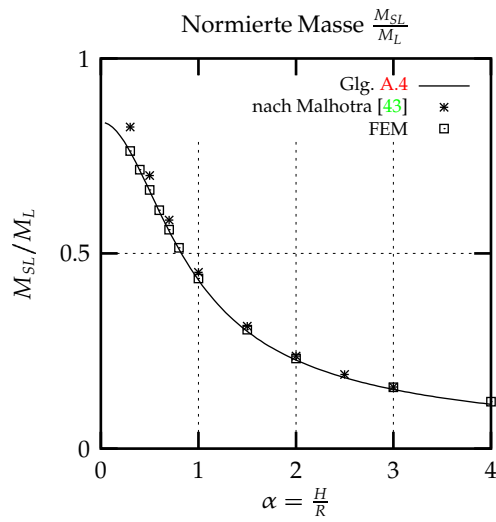
- der Schwappschwingung, da diese von der Schwingung der Wand nahezu entkoppelt ist
- starren Wänden und starrem Boden von Betonbehältern
- der Näherung der Wandeigenformen des Behälters durch z.B. trigonometrische Funktionen oder Eigenformen des Biege- oder Schubstabes

In den *Tafeln A.I bis A.VII* sind einige Lösungen für das Flüssigkeitspotential bei speziellen inhomogenen Randbedingungen angegeben. Für die Interaktionsschwingung von flexibler Behälterwand und Flüssigkeit stellen die Lösungen nur Näherungen dar. In den Tafeln sind zum Vergleich Berechnungsergebnisse anderer Autoren und nach der Methode der Finiten Elemente angegeben.

Tafel A.I	Freie Schwingung der Flüssigkeitsoberfläche (Schwappschwingung)												
Randbedingungen													
Die Schwappschwingung ist weitestgehend unabhängig von der Flexibilität der Tankwand. Es kann deshalb vereinfachend eine starre Wand angenommen werden.													
Teilrand	Randbedingung												
Behälterwand $r=R$	$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$												
Behälterboden $z=0$	$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$												
Oberfläche $z=H$ (Schwappbedingung)	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$												
Lösungen für das Flüssigkeitspotential													
<p>Das Flüssigkeitspotential ergibt sich aus den homogenen Randbedingungen entsprechend dem Abschnitt 2.2.2.</p> $\Phi(\xi, \zeta, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{m,n} \sinh(\varepsilon_n \alpha \xi) J_m(\varepsilon_n \zeta) \cos(m\varphi) e^{i(\omega_{m,n} t + \phi_{m,n})}$ <p>Aus der Schwappbedingung (inhomogene Randbedingung an der freien Oberfläche) erhält man die Eigenfrequenz der Schwappschwingung.</p> $\omega_{m,n} = \sqrt{\frac{g \varepsilon_{m,n} \tanh(\varepsilon_{m,n} \alpha)}{R}} = \frac{C_{SL,m,n}}{\sqrt{R}} \quad (\text{A.2})$ <p>Die Konstante $F_{m,n}$ und der Phasenwinkel $\phi_{m,n}$ bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen.</p>													
<p style="text-align: center;">$C_{SL,1,1}$-Werte</p> <table border="1"> <caption>Approximate data points from the graph</caption> <thead> <tr> <th>$\alpha = \frac{H}{R}$</th> <th>$C_{SL,1,1}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.5</td><td>3.0</td></tr> <tr><td>1.0</td><td>4.0</td></tr> <tr><td>2.0</td><td>4.2</td></tr> <tr><td>3.0</td><td>4.3</td></tr> <tr><td>4.0</td><td>4.3</td></tr> </tbody> </table>		$\alpha = \frac{H}{R}$	$C_{SL,1,1}$	0.5	3.0	1.0	4.0	2.0	4.2	3.0	4.3	4.0	4.3
$\alpha = \frac{H}{R}$	$C_{SL,1,1}$												
0.5	3.0												
1.0	4.0												
2.0	4.2												
3.0	4.3												
4.0	4.3												
Literatur: [8, 6, 60, 14, 43]													

Tafel A.II	Erzwungene Schwingung der Flüssigkeitsoberfläche bei horizontaler Anregung
Randbedingungen	
Analog zur freien Schwingung wird eine starre Wand vorausgesetzt. Daraus ergeben sich die folgenden Randbedingungen.	
Teilrand	Randbedingung
Behälterwand $r=R$	$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \dot{w}(t)$
Behälterboden $z=0$	$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$
Oberfläche $z=H$ (Schwappbedingung)	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$
Lösungen für das Flüssigkeitspotential	
<p>Aus dem Flüssigkeitspotential können die Druckverteilung und die Ersatzgrößen durch Differentiation und Integration bestimmt werden (Angaben für die 1. Umfangsharmonische im n-ten sloshing-Mode).</p> <p>Druckverteilung</p> $p_{SL,n}(\xi, \zeta, \varphi, t) = \rho_L R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon_n^2 - 1} \frac{\cosh(\varepsilon_n \alpha \xi)}{\cosh(\varepsilon_n \alpha)} \frac{J_1(\varepsilon_n \zeta)}{J_1(\varepsilon_n)} \cos(\varphi) S_{a,SL,n}(t) \quad (A.3)$ <p>Masse</p> $\frac{M_{SL,n}}{M_L} = \rho_L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon_n^2 - 1} \frac{1}{\varepsilon_n \alpha} \tanh(\varepsilon_n \alpha) \quad (A.4)$ <p>Höhe aus Wandmoment</p> $\frac{H_{SLW,n}}{H_L} = 1 - \frac{\tanh(\frac{1}{2} \varepsilon_n \alpha)}{\varepsilon_n \alpha} \quad (A.5)$ <p>Höhe aus Bodenmoment</p> $\frac{H_{SLB,n}}{H_L} = \frac{1}{\varepsilon_n \alpha \sinh(\varepsilon_n \alpha)} \quad (A.6)$ <p>$S_{a,SL,n}(t)$: Spektralbeschleunigung $\dot{w}(t)$: radiale Geschwindigkeit der starren Wand</p>	

Fortsetzung Tafel A.II



Literatur: [8, 6, 60, 14, 43]

Tafel A.III	Erzwungene Schwingung der Flüssigkeitsoberfläche bei Kippanregung
Randbedingungen	
Es gilt wieder die Voraussetzung einer starren Wand und zusätzlich die einer starren Behälterbodens.	
Teilrand	Randbedingung
Behälterwand $r=R$	$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$
Behälterboden $z=0$	$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$
Oberfläche $z=H$ (Schwappbedingung)	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -g \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}$
Lösung für das Flüssigkeitspotential	
<p>Aus dem Flüssigkeitspotential können die Druckverteilung und die Ersatzgrößen durch Differentiation und Integration bestimmt werden (Angaben für die 1. Umfangsharmonische im n-ten Mode der Schwappschwingung).</p> <p>Druckverteilung</p> $p_{SL,n}(\xi, \zeta, \varphi, t) = \rho_L R \cos \varphi C_n(\xi, \zeta) S_{a,SL,n}(t) \quad (A.7)$ $C_n(\xi, \zeta) = \left[\epsilon_n \tanh(\epsilon_n \alpha) - \frac{\epsilon_n}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_n} \frac{1}{\epsilon_n^2 + \left(\frac{\lambda_n}{\alpha}\right)^2} + \frac{1}{\alpha} \right] \frac{2}{(\epsilon_n^2 - 1)} \times$ $\times \frac{1}{\epsilon_n \tanh(\epsilon_n \alpha)} \frac{J_1(\epsilon_n \zeta)}{J_1(\epsilon_n)} \frac{\cosh(\epsilon_n \alpha \xi)}{\cosh(\epsilon_n \alpha)} \quad (A.8)$ <p>Ersatzmasse</p> $\frac{M_{SL,n}}{M_L} = \left[\alpha \epsilon_n \tanh(\epsilon_n \alpha) - \epsilon_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} \frac{4}{\epsilon_n^2 + \left(\frac{\lambda_n}{\alpha}\right)^2} + 1 \right] \frac{1}{\epsilon_n} \frac{2}{(\epsilon_n^2 - 1)} \frac{1}{\alpha} \quad (A.9)$ <p>Höhe aus Wandmoment: $\frac{H_{SLW,n}}{H} = 1 - \frac{1}{\epsilon_n \alpha} \tanh\left(\frac{\epsilon_n}{2} \alpha\right) \quad (A.10)$</p> <p>Höhe aus Bodenmoment: $\frac{H_{SLB,n}}{H} = \frac{1}{\epsilon_n \alpha} \frac{1}{\sinh(\epsilon_n \alpha)} \quad (A.11)$</p>	
Literatur: [67]	

Tafel A.IV	Behälter mit starrer Wand bei horizontaler Anregung
Randbedingungen	
Die erzwungene Schwingung wird durch die Verschiebung der starren Behälterwand hervorgerufen. Vertikale Verschiebungen des Bodens und der Flüssigkeitsoberfläche werden nicht berücksichtigt.	
Teilrand	Randbedingung
Behälterwand $r=R$	$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_x(t)$
Behälterboden $z=0$	$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$
Oberfläche $z=H$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$
Lösung für das Flüssigkeitspotential	
Entsprechend <i>Abschnitt 2.2.2</i> ergibt sich als Lösungsansatz für das Flüssigkeitspotential:	
$\Phi(\xi, \zeta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \cos(\mu_n \xi) I_1\left(\frac{\mu_n \zeta}{\alpha}\right) \cos(\varphi) \quad (\text{A.12})$	
Bei Entwicklung der radialen Wandverschiebungen in eine Fourier-cos Reihe und Anwendung der inhomogenen Randbedingung erhält man für $F_n(t)$:	
$F_n(t) = 2R\alpha \frac{(-1)^{n+1}}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right) \mu_n^2} \dot{x}_g(t) \quad (\text{A.13})$	
$\Phi(\xi, \zeta, \varphi, t) = 2R\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n^2} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n \zeta}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \cos(\mu_n \xi) \cos(\varphi) v_x(t) \quad (\text{A.14})$	
Druckverteilung	
$p_{BH}(\xi, \zeta, \varphi, t) = R\alpha\rho_L \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n \zeta}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \cos(\mu_n \xi) \cos \varphi a_x(t) \quad (\text{A.15})$	
Masse	
$\frac{M_{BH}}{M_L} = 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \quad (\text{A.16})$	
Wandmoment	
$\frac{M_{BH}}{M_L} \frac{H_{BHW}}{H} = 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n^4} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} (\cos(\mu_n) + \mu_n \sin(\mu_n) - 1) \quad (\text{A.17})$	
$a_x(t)$: horizontale Freifeldbeschleunigung $v_x(t)$: Geschwindigkeit der starren Behälterwand	

Fortsetzung Tafel A.IV

Bodenmoment

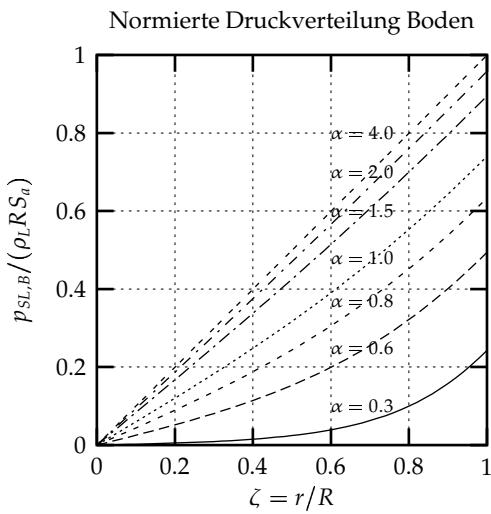
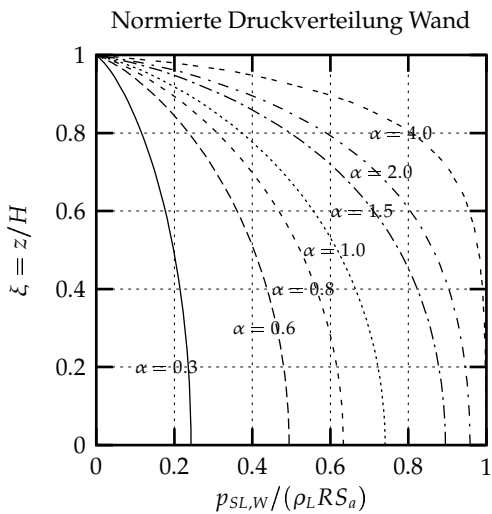
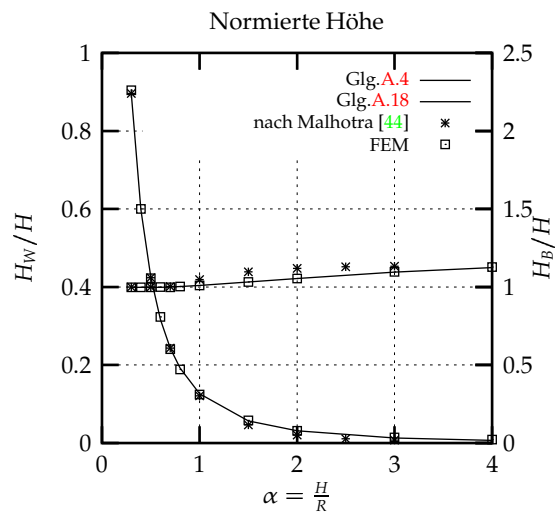
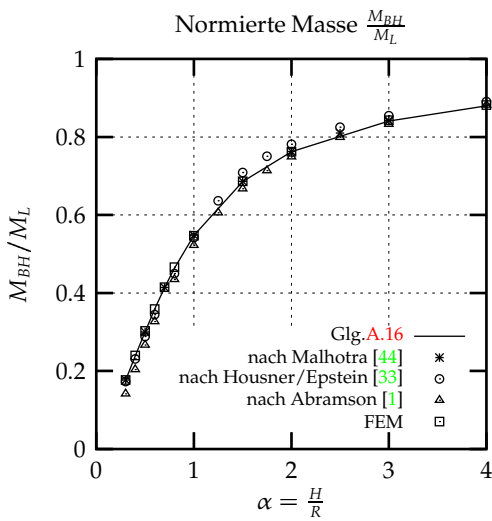
$$\frac{M_{BH}}{M_L} \frac{H_{BHB}}{H} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n^3} \frac{I_2\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \quad (\text{A.18})$$

Näherungen nach Housner/Epstein [33]:

$$\alpha \leq 1.5: \quad \frac{M_B}{M_L} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \tanh \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \quad \alpha \geq 1.5: \quad \frac{M_B}{M_L} = 1 - \frac{0.437}{\alpha}$$

Näherungen nach Abramson [1]:

$$\alpha \leq 3: \quad \frac{M_{BH}}{M_L} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon_n(\varepsilon_n^2 - 1)} \frac{\tanh(\varepsilon_n \alpha)}{\alpha} \quad \alpha > 3: \quad \frac{M_{BH}}{M_L} = 1 - \frac{0.474}{\alpha}$$



Literatur: [8, 6, 43]

Tafel A.V	Behälter mit starrer Wand bei Kippanregung
Randbedingungen	
Die erzwungene Schwingung wird durch eine Verdrehung der starren Behälterwand und des starren Behälterbodens hervorgerufen. Vertikale Verschiebungen der Flüssigkeitsoberfläche werden nicht berücksichtigt.	
Teilrand	Randbedingung
Behälterwand $r=R$	$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \dot{\Theta}_g(t) z \cos(\varphi)$
Behälterboden $z=0$	$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\dot{\Theta}_g(t) r \cos(\varphi)$
Oberfläche $z=H$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$
Lösung für das Flüssigkeitspotential	
<p>Entsprechend <i>Abschnitt 2.2.2</i> wird das Gesamtpotential wieder in zwei Teilpotentiale, die jeweils eine inhomogene und zwei homogenen Randbedingungen erfüllen, aufgeteilt. Für die Flüssigkeitspotentiale infolge Behälterwand- und Behälterbodenverdrehung ergibt sich:</p>	
$\Phi_W(\xi, \zeta, \varphi, t) = R\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} - \frac{2}{\mu_n^3} \right] \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha} \zeta\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \cos(\mu_n \alpha) \cos(\varphi) H \dot{\Theta}_g(t) \quad (\text{A.19})$	
$\Phi_B(\xi, \zeta, \varphi, t) = R \left[\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{\mu_n^3} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha} \zeta\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \cos(\mu_n \alpha) + \zeta(1 - \xi) \right] \cos(\varphi) H \dot{\Theta}_g(t) \quad (\text{A.20})$	
Druckverteilung	
$p(\xi, \zeta, \varphi, t) = C_0(\zeta, \xi) \rho_L R H \ddot{\Theta}_g(t) \cos(\varphi) \quad (\text{A.21})$	
$C_0(\xi, \zeta) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} - \frac{4}{\mu_n^3} \right] \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha} \zeta\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \cos(\mu_n \alpha) + \zeta(1 - \xi) \quad (\text{A.22})$	
Masse	
$M(t) = M_0 H \ddot{\Theta}_g(t) \quad (\text{A.23})$	
$\frac{M_0}{M_L} = \frac{1}{2} + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\mu_n^3} \left[1 - \frac{2(-1)^{n+1}}{\mu_n} \right] \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right) + I_2\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \quad (\text{A.24})$	
$\Theta_g(t)$: Fußpunktverdrehung	

Fortsetzung **Tafel A.V**

Wandmoment

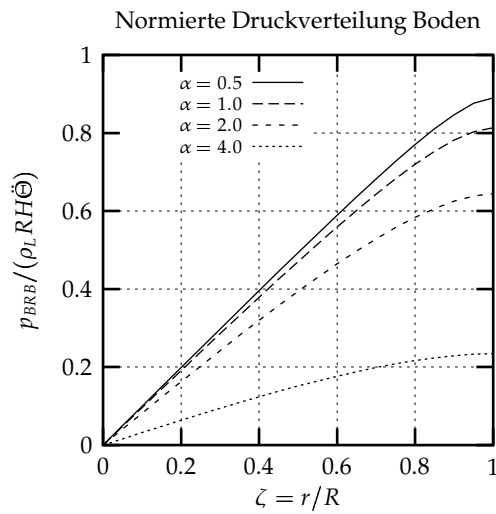
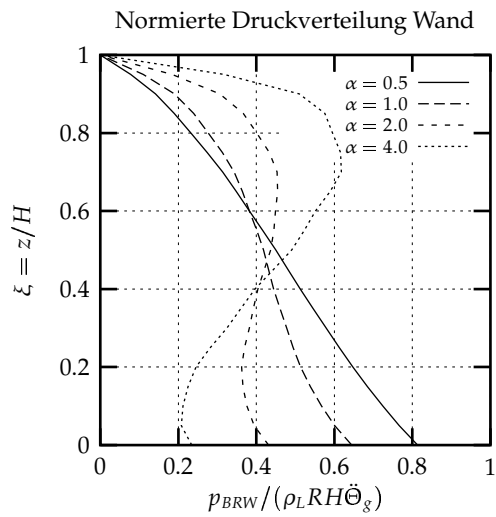
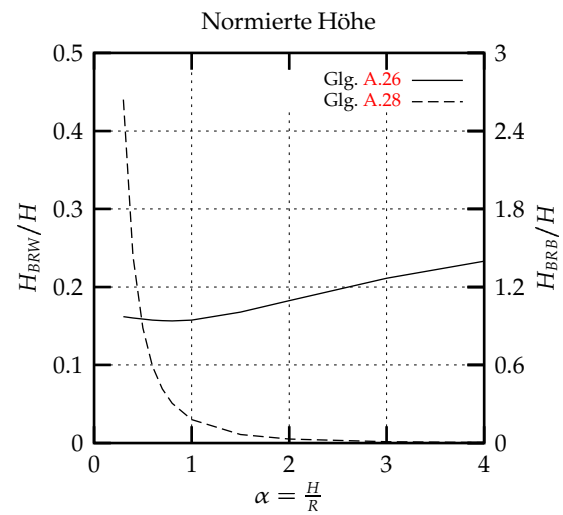
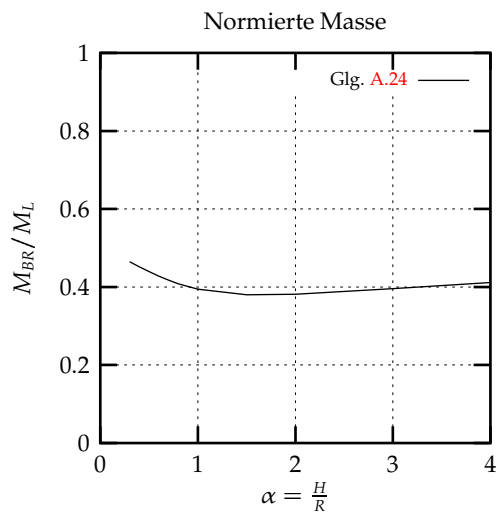
$$MM^W(t) = I_0^W \ddot{\Theta}_g(t) \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{I_0^W}{M_L H^2} = \frac{1}{6} + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\mu_n^3} \left[1 - (-1)^{n+1} \frac{3}{\mu_n} + \frac{2}{\mu_n^2} \right] \frac{I_2\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right) + I_2\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \ddot{\Theta}_g(t) \quad (\text{A.26})$$

Bodenmoment

$$MM^B(t) = I_0^B \ddot{\Theta}_g(t) \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{I_0^B}{M_L H^2} = \frac{1}{4\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\mu_n^3} \left[(-1)^{n+1} - \frac{2}{\mu_n} \right] \frac{I_2\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right) + I_2\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \quad (\text{A.28})$$



Literatur: [67, 73]

Tafel A.VI	Axialsymmetrische Interaktionsschwingung von Flüssigkeit und Schale unter Vorgabe der radialen Wandeigenform
Randbedingungen	
<p>Die zur Bestimmung der Randbedingungen der Flüssigkeit erforderlichen radialen Wandverschiebungen werden aus den Eigenfunktionen der Schale $\psi_{0,n}(\xi)$ multipliziert mit den Zeitfunktionen $q_n(t)$ zusammengesetzt: $w_0(\xi, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \psi_{0,n}(\xi)$. Die n-te Eigenform wird näherungsweise durch die Funktion $\psi_{0,1}(\xi) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\xi\right)$ beschrieben (siehe [40]).</p>	
Teilrand	Randbedingung
Behälterwand $r=R$	$\frac{\partial \Phi_{0,n}}{\partial r} = \dot{q}_n(t) \psi_{0,n}(\xi)$
Behälterboden $z=0$	$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$
Oberfläche $z=H$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$
Lösung für das Flüssigkeitspotential	
<p>Für die zeitabhängigen Amplituden des Flüssigkeitspotentials entsprechend <i>Abschnitt 2.2.2</i> ergibt sich:</p> $F_{0,n,k}(t) = 2R\alpha \frac{\int_0^1 \psi_{0,n}(\xi) \cos(\mu_k \xi) d\xi}{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right) \mu_k} \dot{q}_n(t) \quad (\text{A.29})$ <p>Das Flüssigkeitspotential ergibt sich damit zu:</p> $\Phi_{0,n}(\xi, \zeta, t) = 2R\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\zeta\right)}{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right) \mu_k} \int_0^1 \psi_{0,n}(\xi) \cos(\mu_k \xi) d\xi \cos(\mu_k \xi) \dot{q}_n(t) \quad (\text{A.30})$ <p>Druckverteilung</p> $p_{0,n}(\xi, \zeta, t) = 2R\alpha \rho_L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_k \xi)}{\mu_k} \frac{I_0\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\zeta\right)}{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} G_{n,k} \Gamma_{0,n} S_{a,DH,n}(t) \quad (\text{A.31})$ <p>Modelfaktor $\Gamma_{0,n}$ bei $\psi_{0,n}(\xi) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\xi\right)$</p> $\Gamma_{0,n} = \frac{2}{\mu_n} \frac{I_1\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{\mu_n}{\alpha}\right)} \quad (\text{A.32})$	

Fortsetzung **Tafel A.VI**

Bei einer ersten Eigenform von $\psi_{0,1}(\xi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$ und unter ausschließlicher Berücksichtigung von Membrankräften in Ringrichtung der Schale:

Druckverteilung

$$p_{0,1}(\xi, \zeta, t) = \rho_L H \cos(\mu_1 \xi) \frac{I_0\left(\frac{\mu_1 \zeta}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right)} \frac{8}{\pi^2} S_{a,DV,1}(t) \quad (\text{A.33})$$

Modedefaktor $\Gamma_{0,1}$

$$\Gamma_{0,1} = \frac{4}{\pi} \frac{I_1\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right)} \quad (\text{A.34})$$

Masse auf Behälterboden

$$\frac{M_{DV,1}}{M_L} = 4 \frac{\alpha}{\mu_1^3} \frac{I_1\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right)} S_{a,DV,1}(t) \quad (\text{A.35})$$

Integral $G_{n,k}$

$$G_{n,k} = \int_0^1 \cos\left(n \frac{\pi}{2} \xi\right) \cos(\mu_k \xi) d\xi \quad G_{n,k} = \begin{cases} 0.5 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

Eigenfrequenz

$$\omega_{0,1} = \sqrt{\frac{\pi d \rho}{2 R \alpha (1 - \nu^2) \rho_L} \frac{I_1\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right)} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}}} = \frac{C}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{A.36})$$

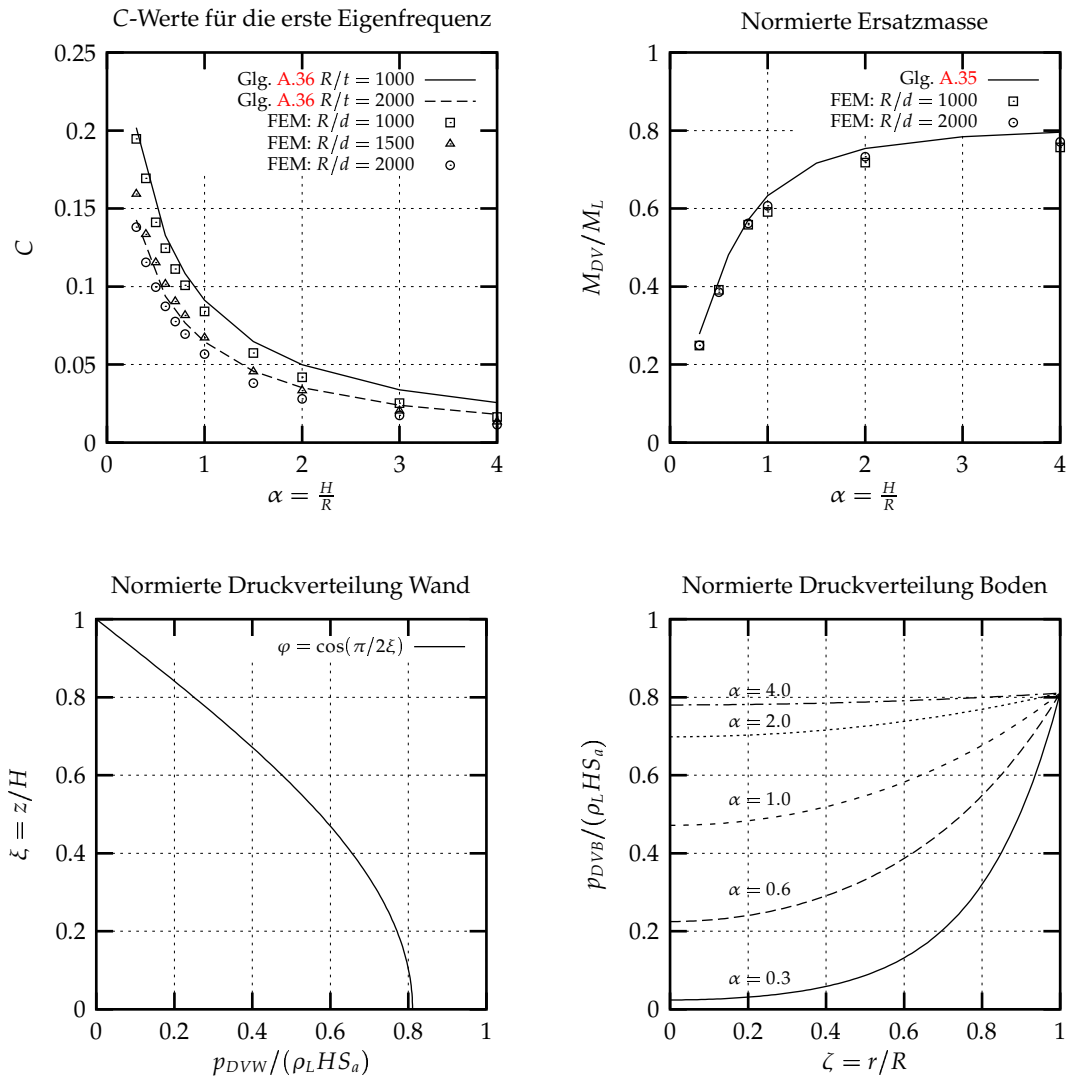
Eine Einspannung am Behälterboden kann näherungsweise mit dem Faktor β berücksichtigt werden (Scharf [54]).

$$\begin{aligned} 0.0 < \alpha \leq 0.8 & \quad \beta = 1.0 \\ 0.8 < \alpha \leq 4.0 & \quad \beta = 1.078 + 0.274 \ln(\alpha) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Mit dem Faktor β sind sowohl die Druckverteilungen und damit auch die Ersatzmassen zu multiplizieren. Für die Schlankheiten $\alpha = 0.8 - 4.0$ ergeben sich Erhöhungen von 1.7% bis 45.8%. Aus einem Vergleich mit Ergebnissen anderer Verfahren ist ersichtlich, daß diese Vorgehensweise zu große Antwortgrößen liefert.

$S_{a,DV,n}(t)$: Spektralbeschleunigung für den n-ten Biegemode

Fortsetzung Tafel A.VI



Literatur: [60, 40, 54, 44, 72, 67]

Tafel A.VII	Antimetrische Interaktionsschwingung von Flüssigkeit und Schale unter Vorgabe der radialen Wandeigenform
Randbedingungen	
<p>Für die radialen Wandverschiebungen wird analog zur axialsymmetrischen Schwingung der folgende Ansatz getroffen: $w_1(\xi, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \psi_{1,n}(\xi) \cos(\varphi)$. Näherungsweise kann für die Eigenformen eine Linearkombination aus den Eigenformen des äquivalenten Biege- und Schubträgers angenommen werden. Es konnte gezeigt werden, daß in vielen Fällen die Gerade $\psi_{1,1}(\xi) = \xi$ eine brauchbare Näherung ist [17]. Weiterhin werden durch die Eigenformen $\psi_{1,1}(\xi) = 1 - \cos(\frac{\pi}{2}\xi)$ und $\psi_{1,1}(\xi) = \sin(\frac{\pi}{2}\xi)$ die dynamischen Antwortgrößen des Behälters nach unten bzw. oben eingegrenzt.</p>	
Teilrand	Randbedingung
Behälterwand r=R	$\frac{\partial \Phi_{1,n}}{\partial r} = \dot{q}_n(t) \psi_{1,n}(\xi) \cos(\varphi)$
Behälterboden z=0	$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$
Oberfläche z=H	$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$
Lösung für das Flüssigkeitspotential	
<p>Für die zeitabhängigen Amplituden des Flüssigkeitspotentials entsprechend <i>Abschnitt 2.2.2</i> ergibt sich:</p> $F_{1,n,k}(t) = 2R\alpha \frac{\int_0^1 \psi_{1,n}(\xi) \cos(\mu_k \xi) d\xi}{I_1'(\frac{\mu_k}{\alpha}) \mu_k} \dot{q}_n(t) \quad (\text{A.38})$ <p>Das Flüssigkeitspotential ergibt sich damit zu:</p> $\Phi_{1,n}(\xi, \zeta, \varphi, t) = 2R\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_1(\frac{\mu_k}{\alpha} \zeta)}{I_1'(\frac{\mu_k}{\alpha}) \mu_k} \int_0^1 \psi_{1,n}(\xi) \cos(\mu_k \xi) d\xi \cos(\mu_k \xi) \cos(\varphi) \dot{q}_n(t) \quad (\text{A.39})$ <p>Druckverteilung</p> $p_{1,n}(\xi, \zeta, \varphi, t) = 2R\alpha \rho_L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_k \xi)}{\mu_k} \frac{I_1(\frac{\mu_k}{\alpha} \zeta)}{I_1'(\frac{\mu_k}{\alpha})} G_{n,k} \cos(\varphi) \Gamma_{1,n} S_{a,DH,n}(t) \quad (\text{A.40})$ <p>Masse</p> $\frac{M_{DH,n}}{M_L} = 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\mu_k^2} \frac{I_1(\frac{\mu_k}{\alpha})}{I_1'(\frac{\mu_k}{\alpha})} G_{n,k} \Gamma_{1,n} S_{a,DH,n}(t) \quad (\text{A.41})$	

Fortsetzung Tafel A.VII

Wandmoment

$$\frac{M_{DH,n} H_{DW,n}}{M_L H} = 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k (-1)^{k+1} - 1}{\mu_k^3} \frac{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} G_{n,k} \Gamma_{1,n} S_{a,DH,n}(t) \quad (\text{A.42})$$

Bodenmoment

$$\frac{M_{DH,n} H_{DB,n}}{M_L H} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k^2} \frac{I_2\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} G_{n,k} \Gamma_{1,n} S_{a,DH,n}(t) \quad (\text{A.43})$$

Modelfaktor bei konstanter Wandstärke

$$\Gamma_{1,n} = \frac{\int_0^1 p_{1,n}(\xi) d\xi}{\int_0^1 \psi_{1,n}(\xi) p_{1,n}(\xi) d\xi} \quad (\text{A.44})$$

Integral $G_{n,k}$

$$\begin{aligned} G_{n,k} &= \int_0^1 \psi_{1,n}(\xi) \cos(\mu_k \xi) d\xi \\ \psi_{1,1}(\xi) &= \xi & G_{1,k} &= \frac{1}{\mu_k} [\mu_k \sin(\mu_k) - 1] \\ \psi_{1,1}(\xi) &= \sin\left(\xi \frac{\pi}{2}\right) & G_{1,k} &= \begin{cases} -\frac{1}{\pi(k-1)} & \text{gerades } k \\ \frac{1}{\pi k} & \text{ungerades } k \end{cases} \\ \psi_{1,1}(\xi) &= 1 - \cos\left(\xi \frac{\pi}{2}\right) & G_{1,k} &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} & k = 1 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{\mu_k} & k > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

1. Eigenfrequenz (nur die Dehnsteifigkeit der Schale berücksichtigt)

$$\omega_{1,1} = \sqrt{\frac{d}{1-\nu^2} \frac{\alpha^2 N}{m_L + m_S} \frac{1}{H} \sqrt{\frac{E}{\rho}}} = \frac{C}{H} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{A.46})$$

$$m_L = 2 \frac{\rho_L}{\rho} R \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \frac{I_1\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)}{I_1'\left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)} G_{n,k}^2 \quad m_S = d \int_0^1 \psi(\xi)^2 d\xi \quad (\text{A.47})$$

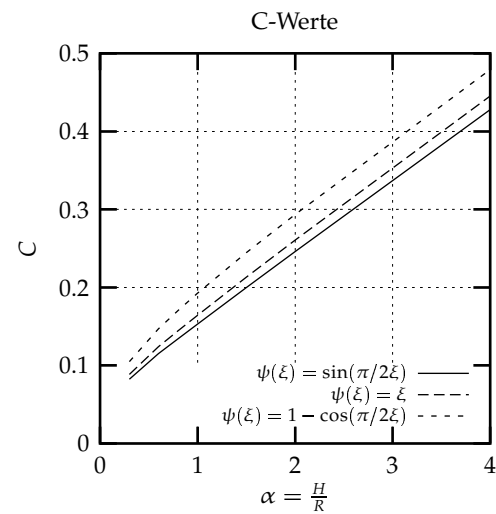
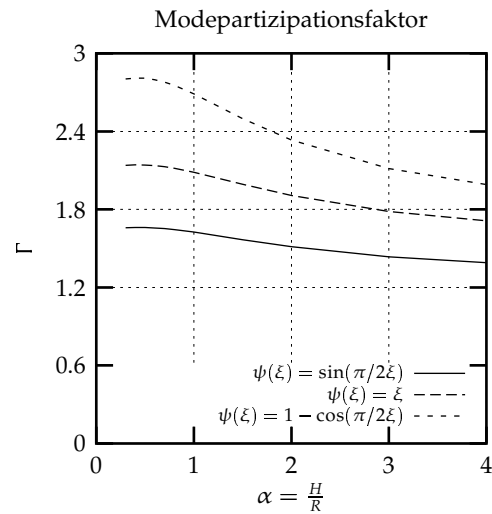
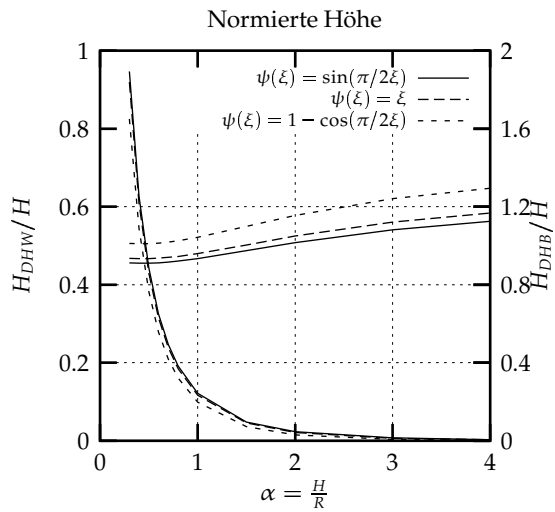
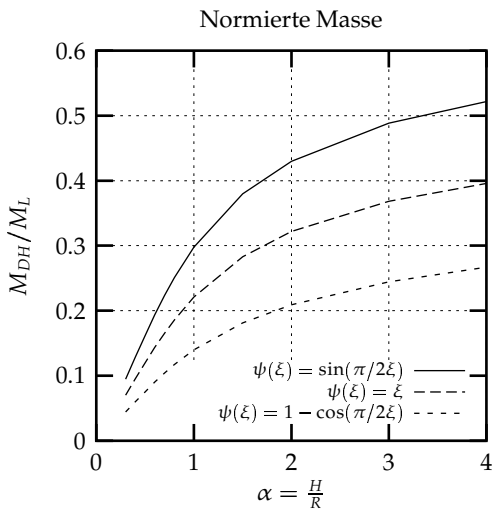
 $S_{a,DH,n}(t)$: Spektralbeschleunigung

Fortsetzung Tafel A.VII

Integral N

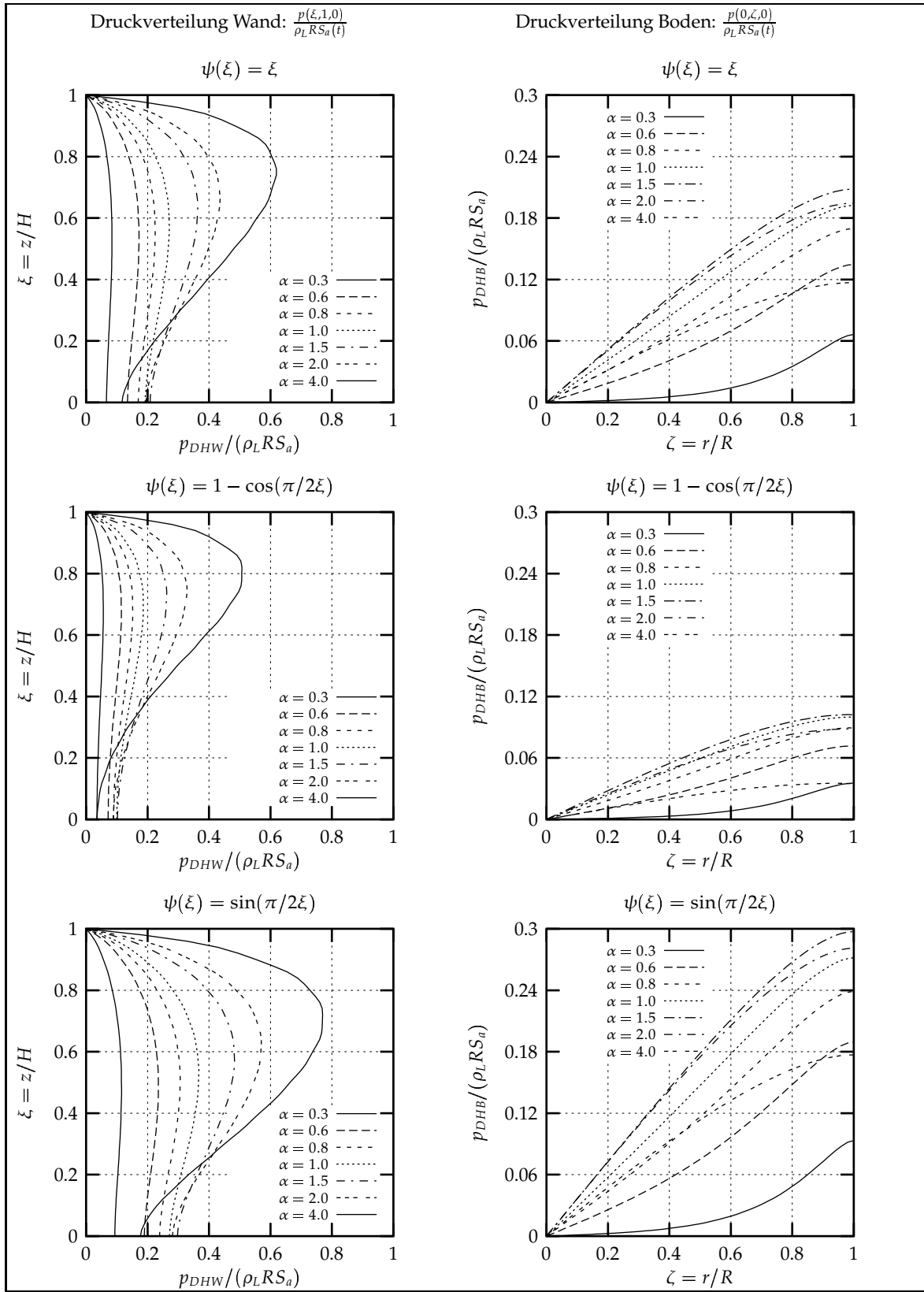
$$N = \int_0^1 \psi_{1,n}(\xi)^2 d\xi \quad (A.48)$$

$$\begin{aligned} \psi_{1,n}(\xi) &= \xi & N &= \frac{1}{3} \\ \psi_{1,n}(\xi) &= \sin\left(\xi \frac{\pi}{2}\right) & N &= \frac{1}{2} \\ \psi_{1,n}(\xi) &= 1 - \cos\left(\xi \frac{\pi}{2}\right) & N &= \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$



Literatur: [60, 44, 74, 75, 67]

Fortsetzung Tafel A.VII



B Einflußfunktion der Zylinderschale

Die Bestimmung der Einflußfunktionen der Zylinderschale unter der Wirkung einer Ringlast wird nach den folgenden Schritten durchgeführt:

1. Die Schale wird am Angriffspunkt ξ der Ringlast in eine obere und eine untere Schale aufgeteilt. Die Ringlast wird vollständig am unteren Teil aufgebracht. Durch die Schnittführung werden Randkraftgrößen q und m an den Schnittstellen freigesetzt.
2. Es werden die Verformungen der Teilschalen für die Randlast mit der Amplitude 1 und für die Übergangsschnittgrößen mit unbekannter Amplitude unter Beachtung der Randbedingungen ermittelt.
3. Aus den Verformungsbedingungen an der Verbindungsstelle der Teilschalen werden die Amplituden der Übergangsschnittgrößen bestimmt.
4. Die Verformungen der Teilschalen ergeben sich aus der Summe der Verformungen infolge der Randlast und infolge der Übergangsschnittgrößen. Bei den oberen Teilschalen sind die auftretenden Starrkörperverschiebungen zu beachten. Die Verformungen der Gesamtschale werden durch die Verformungen der zugehörigen Teilschale festgelegt.

B.1 Axialsymmetrische Belastung

Als äußere Lasten sind radiale Ringkräfte $q_z = 1$ und axiale Ringkräfte $n_z = 1$ zu berücksichtigen (Abb. B.1). Die Trägheitskräfte der Flüssigkeit rufen radiale Ringkräfte hervor. Die Trägheitskräfte der Schale bewirken radiale und axiale Ringkräfte. Den radialen Ringlasten ist die Einflußfunktion der radialen Verschiebungen $g_{ww}(\bar{\xi}, \xi)$ zugeordnet. Den axialen Ringlasten kann die Einflußfunktion der axialen Verschiebungen $g_{uu}(\bar{\xi}, \xi)$ zugeordnet werden. Die Einflußfunktionen sind symmetrisch: $g_{ww}(\bar{\xi}, \xi) = g_{ww}(\xi, \bar{\xi})$ und $g_{uu}(\bar{\xi}, \xi) = g_{uu}(\xi, \bar{\xi})$. Weiterhin werden durch die radialen und axialen Ringlasten die axialen bzw. radialen Verschiebungen $g_{uw}(\bar{\xi}, \xi)$ und $g_{wu}(\bar{\xi}, \xi)$ hervorgerufen. Diese Verschiebungen sind ebenfalls symmetrisch: $g_{uw}(\bar{\xi}, \xi) = g_{wu}(\xi, \bar{\xi})$ und $g_{wu}(\bar{\xi}, \xi) = g_{uw}(\xi, \bar{\xi})$. Sie bewirken eine Kopplung von axialer und radialer Bewegung der Schale. Die axiale Verschiebung der oberen Teilschale berechnet sich aus einer Starrkörperverschiebung infolge der axialen Verschiebung des unteren Schalenteils und der axialen Verschiebungen infolge der Übergangsschnittkräfte.

Als Übergangsschnittkräfte treten die Kräfte q_z und m_z auf (Abb. B.2).

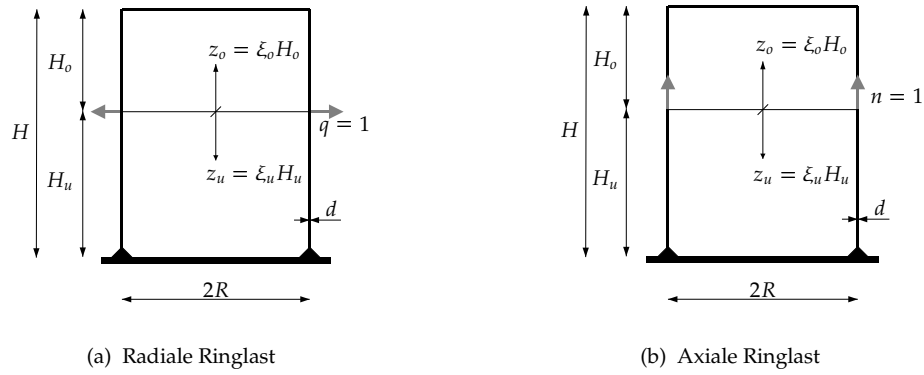


Abb. B.1: Lastfälle

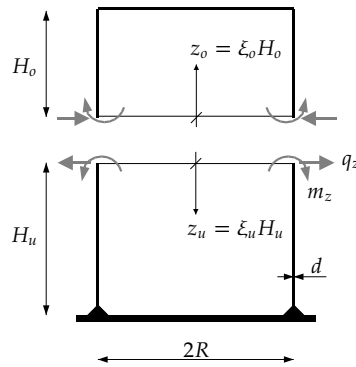
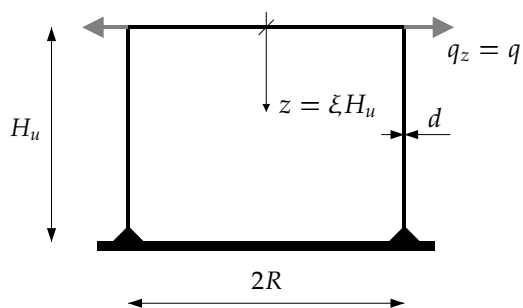


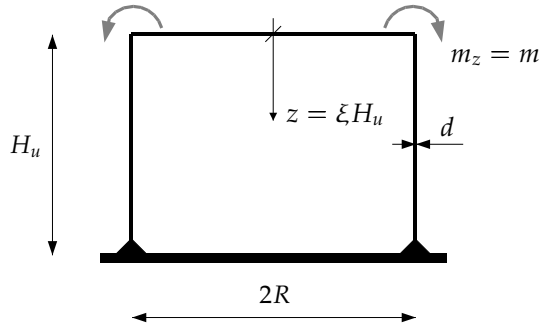
Abb. B.2: Übergangsschnittgrößen axialsymmetrische Belastung

B.1.1 Randbedingungen

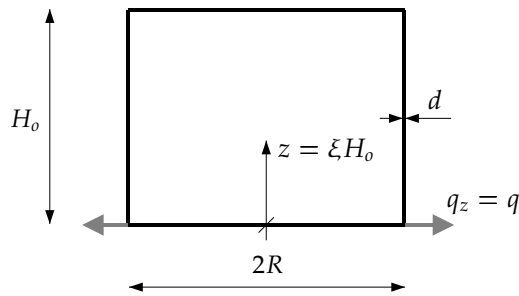
Randlastfall 1



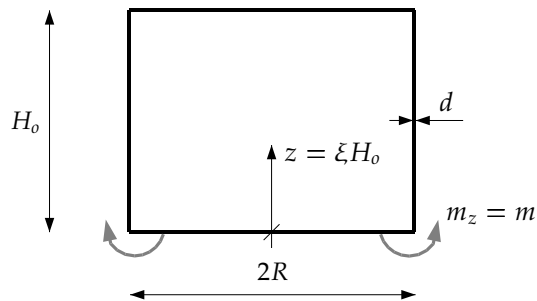
$z = 0$	$z = H_u$
1. $0 = \frac{K}{R^2} w''$	4. $0 = u$
2. $0 = \frac{D}{R} (u' + \nu w)$	5. $0 = w$
3. $q = \frac{K}{R^3} w'''$	6. $0 = w'$

Randlastfall 2

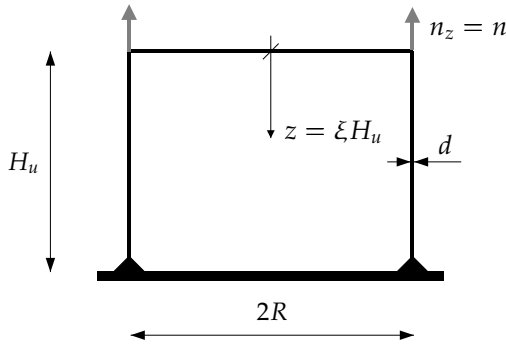
$z = 0$	$z = H_u$
1. $m = \frac{K}{R^2} w''$	4. $0 = u$
2. $0 = \frac{D}{R} (u' + \nu w)$	5. $0 = w$
3. $0 = \frac{K}{R^3} w'''$	6. $0 = w'$

Randlastfall 3

$z = 0$	$z = H_o$
1. $0 = \frac{K}{R^2} w''$	3. $0 = \frac{K}{R^2} w''$
2. $q = \frac{K}{R^3} w'''$	4. $0 = \frac{K}{R^3} w'''$

Randlastfall 4

$z = 0$	$z = H_o$
1. $m = \frac{K}{R^2} w''$	3. $0 = \frac{K}{R^2} w''$
2. $0 = \frac{K}{R^3} w'''$	4. $0 = \frac{K}{R^3} w'''$

Randlastfall 5

$z = 0$		$z = H_u$
1.	$0 = \frac{K}{R^2} w''$	4. $0 = u$
2.	$n = \frac{D}{R} (u' + \nu w)$	5. $0 = w$
3.	$0 = \frac{K}{R^2} w'''$	6. $0 = w'$

B.1.2 Ansatz für die Verformungen

In den Randlastfällen 1, 2 und 5 wird für die Verschiebungen folgender Ansatz getroffen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{D} \mathbf{c}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_A e^{\lambda_3 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_4 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_7 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_8 \alpha \xi} & N \frac{\alpha}{R} \xi & -N \\ e^{\lambda_3 \alpha \xi} & e^{\lambda_4 \alpha \xi} & e^{\lambda_7 \alpha \xi} & e^{\lambda_8 \alpha \xi} & N \frac{\nu}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \\ C_7 \\ C_8 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

In den Randlastfällen 3 und 4 treten nur Biegeverformungen auf:

$$\mathbf{u} = \mathbf{D} \mathbf{c}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_A e^{\lambda_3 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_4 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_7 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_8 \alpha \xi} \\ e^{\lambda_3 \alpha \xi} & e^{\lambda_4 \alpha \xi} & e^{\lambda_7 \alpha \xi} & e^{\lambda_8 \alpha \xi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

B.1.3 Bestimmung der unbekannten Koeffizienten des Ansatzes

Die Ansätze für die Verschiebungen werden in die Randbedingungen eingesetzt. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten \mathbf{c} :

$$\mathbf{D} \mathbf{c} = \mathbf{p} \quad (\text{B.3})$$

Der Belastungsvektor \mathbf{p} ergibt sich aus der linken Seite der Randbedingung. Die Matrix \mathbf{D} läßt sich in einen Anteil aus den Biegeverformungen \mathbf{D}_B und den Membranverformungen \mathbf{D}_M zerlegen:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{D}_B \mathbf{D}_M] \quad (\text{B.4})$$

Für die Randlastfälle 1, 2 und 5:

$$\mathbf{D}_B = \begin{bmatrix} \frac{K}{R^2} \lambda_3^2 & \frac{K}{R^2} \lambda_4^2 & \frac{K}{R^2} \lambda_7^2 & \frac{K}{R^2} \lambda_8^2 \\ \frac{D}{R} (\lambda_3 H_{A3} + \nu) & \frac{D}{R} (\lambda_4 H_{A4} + \nu) & \frac{D}{R} (\lambda_7 H_{A7} + \nu) & \frac{D}{R} (\lambda_8 H_{A8} + \nu) \\ \frac{K}{R^3} \lambda_3^3 & \frac{K}{R^3} \lambda_4^3 & \frac{K}{R^3} \lambda_7^3 & \frac{K}{R^3} \lambda_8^3 \\ H_{A3} e^{\lambda_3 \alpha} & H_{A4} e^{\lambda_4 \alpha} & H_{A7} e^{\lambda_7 \alpha} & H_{A8} e^{\lambda_8 \alpha} \\ e^{\lambda_3 \alpha} & e^{\lambda_4 \alpha} & e^{\lambda_7 \alpha} & e^{\lambda_8 \alpha} \\ \lambda_3 e^{\lambda_3 \alpha} & \lambda_4 e^{\lambda_4 \alpha} & \lambda_7 e^{\lambda_7 \alpha} & \lambda_8 e^{\lambda_8 \alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{D}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N \frac{1-\nu^2}{R} & 0 \\ 0 & 0 \\ N \frac{\alpha}{R} & -N \\ -N \frac{\nu}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

In den Randlastfällen 3 und 4 ist nur der Biegeanteil enthalten:

$$\mathbf{D}_B = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{K}{R^2} \lambda_3^2 & \frac{K}{R^2} \lambda_4^2 & \frac{K}{R^2} \lambda_7^2 & \frac{K}{R^2} \lambda_8^2 \\ \frac{K}{R^3} \lambda_3^3 & \frac{K}{R^3} \lambda_4^3 & \frac{K}{R^3} \lambda_7^3 & \frac{K}{R^3} \lambda_8^3 \\ \frac{K}{R^2} \lambda_3^2 e^{\lambda_3 \alpha} & \frac{K}{R^2} \lambda_4^2 e^{\lambda_4 \alpha} & \frac{K}{R^2} \lambda_7^2 e^{\lambda_7 \alpha} & \frac{K}{R^2} \lambda_8^2 e^{\lambda_8 \alpha} \\ \frac{K}{R^3} \lambda_3^3 e^{\lambda_3 \alpha} & \frac{K}{R^3} \lambda_4^3 e^{\lambda_4 \alpha} & \frac{K}{R^3} \lambda_7^3 e^{\lambda_7 \alpha} & \frac{K}{R^3} \lambda_8^3 e^{\lambda_8 \alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

B.1.4 Bestimmung der Übergangsschnittgrößen

Nach der Bestimmung der Koeffizienten C_i sind die Verschiebungen noch von den Amplituden der Übergangsschnittgrößen abhängig. An der Schnittstelle müssen die radialen Verschiebungen des unteren und oberen Schalenteils übereinstimmen: $w_u = w_o$. Weiterhin ist die Verdrehung der Meridiantangenten $w'_u = \frac{\partial w_u}{\partial \xi} \frac{1}{H}$ und w'_o zu berücksichtigen. Die Verschiebungen und Verdrehungen setzen sich aus den Anteilen infolge des Randmoments (w_m, w'_m), der Randquerkraft (w_q, w'_q) und der Ringlast (w_p, w'_p) zusammen. Die Verschiebungen sind positiv nach außen und die Verdrehungen sind positiv im Uhrzeigersinn. Für die Verschiebungen und Verdrehungen ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} w_o &= m w_{m,o} - q w_{q,o} & w_u &= m w_{m,u} + q w_{q,u} + w_p \\ w'_o &= m w'_{m,o} - q w'_{q,o} & w'_u &= m w'_{m,u} + q w'_{q,u} + w_p \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Daraus läßt sich das folgende Gleichungssystem für die Bestimmung der Übergangsschnittgrößen q und m ableiten:

$$\begin{bmatrix} w_{m,o} - w_{m,u} & w_{q,o} + w_{q,u} \\ -w'_{m,o} - w'_{m,u} & w'_{q,o} - w'_{q,u} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_p \\ w'_p \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

B.2 Antimetrische Belastung

Als äußere Lasten sind radiale Ringkräfte $q_z = 1$, axiale Ringkräfte $n_z = 1$ und Umfangskräfte $n_{\varphi x}$ zu berücksichtigen (Abb. B.3, B.4). Die Trägheitskräfte der Flüssigkeit rufen radiale Ringkräfte hervor. Die Trägheitskräfte der Schale bewirken radiale und axiale Ringkräfte sowie Kräfte in Umfangsrichtung. Den radialen Ringlasten ist die Einflußfunktion der radialen Verschiebungen

$g_{ww}(\bar{\xi}, \xi)$ zugeordnet. Der Ringlast in Umfangsrichtung kann die Einflußfunktion der Umfangsverschiebungen $g_{vv}(\bar{\xi}, \xi)$ zugeordnet werden. Für die axialen Ringlasten wird die Einflußfunktion durch die axialen Verschiebungen $g_{uu}(\bar{\xi}, \xi)$ gebildet. Die Einflußfunktionen sind symmetrisch: $g_{ww}(\bar{\xi}, \xi) = g_{ww}(\xi, \bar{\xi})$, $g_{vv}(\bar{\xi}, \xi) = g_{vv}(\xi, \bar{\xi})$ und $g_{uu}(\bar{\xi}, \xi) = g_{uu}(\xi, \bar{\xi})$. Die radialen und axialen Ringlasten sowie die Umfangskräfte rufen auch Verschiebungen senkrecht zu ihrer Krafrichtung hervor. So erzeugt z.B. die radiale Ringlast auch Verschiebungen in Umfangs- und axialer Richtung: $g_{vw}(\bar{\xi}, \xi)$ und $g_{uw}(\bar{\xi}, \xi)$. Diese Verschiebungen sind analog zur axialsymmetrischen Belastung ebenfalls symmetrisch: $g_{vw}(\bar{\xi}, \xi) = g_{vw}(\xi, \bar{\xi})$ und $g_{uw}(\bar{\xi}, \xi) = g_{uw}(\xi, \bar{\xi})$. Sie bewirken eine Kopplung der Bewegungszustände in radialer, axialer und Umfangsrichtung. Die axiale Verschiebung der oberen Teilschale berechnet sich aus einer Starrkörperverschiebung infolge der axialen Verschiebung des unteren Schalenteils und der axialen Verschiebungen infolge der Übergangsschnittkräfte. Weiterhin bewirken die $\cos \varphi$ -verteilten axialen Verschiebungen des unteren Schalenteils eine Starrkörperverdrehung des oberen Schalenteils.

Die Übergangsschnittkräfte werden durch die beiden Kräftepaare $m_z \Leftrightarrow n_z$ und $q_z \Leftrightarrow n_{\varphi z}$ gebildet (Abb. B.4).

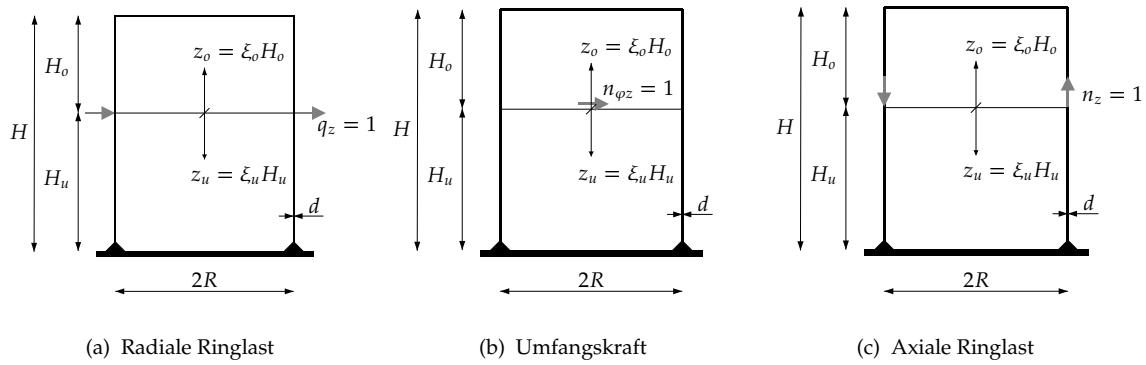


Abb. B.3: Lastfälle

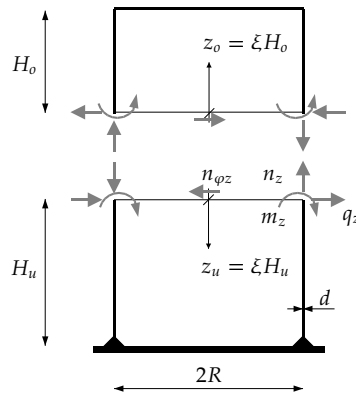
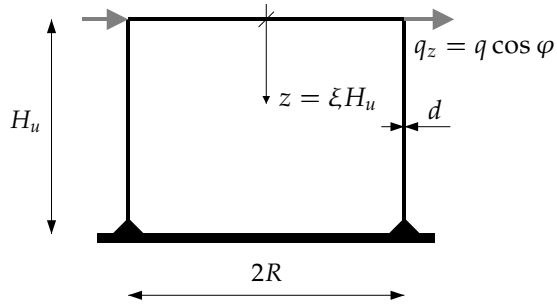


Abb. B.4: Übergangsschnittgrößen antisymmetrische Belastung

B.2.1 Randbedingungen

Randlastfall 1



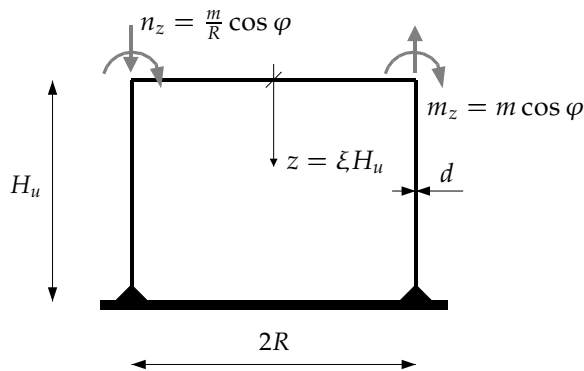
$$z = 0$$

1. $0 = \frac{K}{R^2} (w'' - \nu w)$
2. $0 = \frac{D}{R} (u' + \nu v + \nu w)$
3. $q = \frac{K}{R^3} [w''' - (2 - \nu) w']$
4. $0 = \frac{D}{R} \frac{1-\nu}{2} (v' - u) + \frac{K}{R^3} (1 - \nu) w'$

$$z = H_u$$

5. $0 = u$
6. $0 = v$
7. $0 = w$
8. $0 = w'$

Randlastfall 2

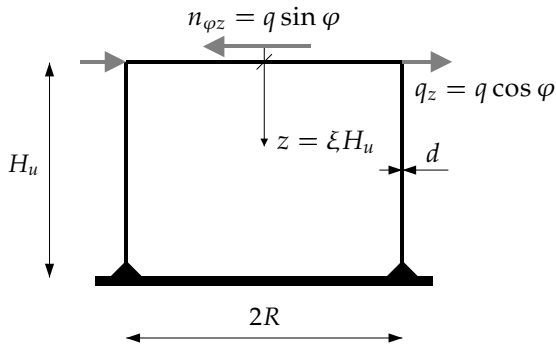


$$z = 0$$

1. $m = \frac{K}{R^2} (w'' - \nu w)$
2. $\frac{m}{R} = \frac{D}{R} (u' + \nu v + \nu w)$
3. $0 = \frac{K}{R^3} [w''' - (2 - \nu) w']$
4. $0 = \frac{D}{R} \frac{1-\nu}{2} (v' - u) + \frac{K}{R^3} (1 - \nu) w'$

$$z = H_u$$

5. $0 = u$
6. $0 = v$
7. $0 = w$
8. $0 = w'$

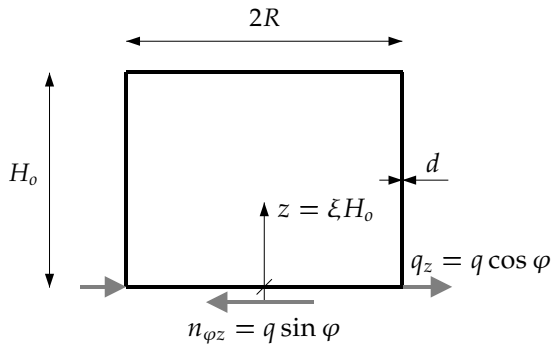
Randlastfall 3

$$z = 0$$

1. $0 = \frac{K}{R^2} (w'' - \nu w)$
2. $0 = \frac{D}{R} (u' + \nu v + \nu w)$
3. $q = \frac{K}{R^3} [w''' - (2 - \nu) w']$
4. $q = \frac{D}{R} \frac{1-\nu}{2} (v' - u) + \frac{K}{R^3} (1 - \nu) w'$

$$z = H_u$$

5. $0 = u$
6. $0 = v$
7. $0 = w$
8. $0 = w'$

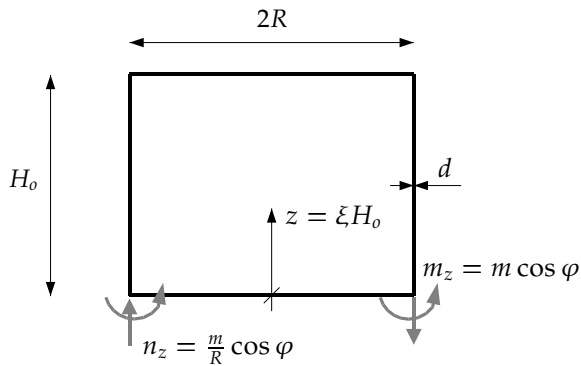
Randlastfall 4

$$z = H_o$$

3. $0 = \frac{K}{R^2} (w'' - \nu w)$
4. $0 = \frac{K}{R^3} [w''' - (2 - \nu) w']$

$$z = 0$$

1. $0 = \frac{K}{R^2} (w'' - \nu w)$
2. $q = \frac{K}{R^3} [w''' - (2 - \nu) w']$

Randlastfall 5

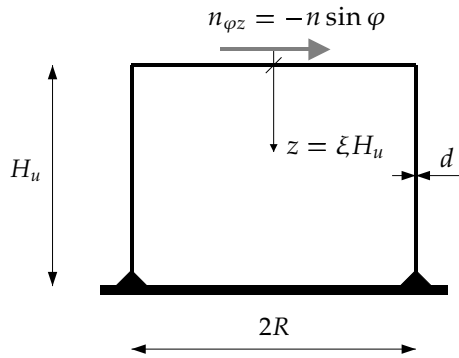
$$z = H_o$$

3. $0 = \frac{K}{R^2} (w'' - \nu w)$
4. $0 = \frac{K}{R^3} [w''' - (2 - \nu) w']$

$$z = 0$$

1. $m = \frac{K}{R^2} (w'' - \nu w)$
2. $0 = \frac{K}{R^3} [w''' - (2 - \nu) w']$

Randlastfall 6



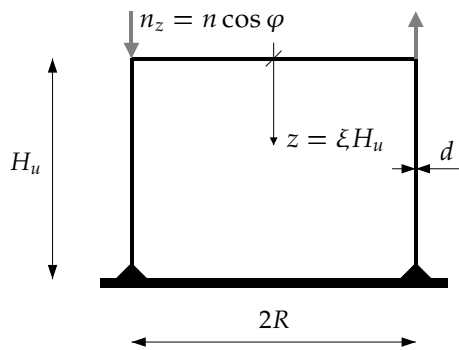
$$z = 0$$

1. $0 = \frac{K}{R^2} (w'' - \nu w)$
2. $0 = \frac{D}{R} (u' + \nu v + \nu w)$
3. $0 = \frac{K}{R^3} [w''' - (2 - \nu) w']$
4. $n = \frac{D}{R} \frac{1-\nu}{2} (v' - u) + \frac{K}{R^3} (1 - \nu) w'$

$$z = H_u$$

5. $0 = u$
6. $0 = v$
7. $0 = w$
8. $0 = w'$

Randlastfall 7



$$z = 0$$

1. $0 = \frac{K}{R^2} (w'' - \nu w)$
2. $n = \frac{D}{R} (u' + \nu v + \nu w)$
3. $0 = \frac{K}{R^3} [w''' - (2 - \nu) w']$
4. $0 = \frac{D}{R} \frac{1-\nu}{2} (v' - u) + \frac{K}{R^3} (1 - \nu) w'$

$$z = H_u$$

5. $0 = u$
6. $0 = v$
7. $0 = w$
8. $0 = w'$

B.2.2 Ansatz für die Verformungen

Für die Verschiebungen der Randlastfälle 1, 2, 3, 6 und 7 wird folgender Ansatz getroffen:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_A e^{\lambda_3 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_4 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_7 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_8 \alpha \xi} & -\frac{\alpha^2}{2R} \xi^2 & \frac{\alpha}{R} \xi & -1 & 0 \\ H_B e^{\lambda_3 \alpha \xi} & H_B e^{\lambda_4 \alpha \xi} & H_B e^{\lambda_7 \alpha \xi} & H_B e^{\lambda_8 \alpha \xi} & -\frac{\alpha^3}{6R} \xi^3 + \frac{2(1+\nu)\alpha}{R} \xi & \frac{\alpha^2}{2R} \xi^2 & -\alpha \xi & -1 \\ e^{\lambda_3 \alpha \xi} & e^{\lambda_4 \alpha \xi} & e^{\lambda_7 \alpha \xi} & e^{\lambda_8 \alpha \xi} & \frac{\alpha^3}{6R} \xi^3 - \frac{(2+\nu)\alpha}{R} \xi & -\frac{\alpha^2}{2R} \xi^2 - \frac{\nu}{R} & \alpha \xi & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \\ C_7 \\ C_8 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

In den Randlastfällen 4 und 5 treten nur Biegeverformungen auf:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_A e^{\lambda_3 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_4 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_7 \alpha \xi} & H_A e^{\lambda_8 \alpha \xi} \\ H_B e^{\lambda_3 \alpha \xi} & H_B e^{\lambda_4 \alpha \xi} & H_B e^{\lambda_7 \alpha \xi} & H_B e^{\lambda_8 \alpha \xi} \\ e^{\lambda_3 \alpha \xi} & e^{\lambda_4 \alpha \xi} & e^{\lambda_7 \alpha \xi} & e^{\lambda_8 \alpha \xi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

B.2.3 Bestimmung der unbekannten Koeffizienten des Ansatzes

Die Ansätze für die Verschiebungen werden in die Randbedingungen eingesetzt. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten \mathbf{c} : $\mathbf{D} \mathbf{c} = \mathbf{p}$ mit $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_B \ \mathbf{D}_M]$.

Für die Randlastfälle 1, 2, 3, 6 und 7:

$$\mathbf{D}_B = \begin{bmatrix} (\lambda_3^2 - \nu) \frac{K}{R^2} & (\lambda_4^2 - \nu) \frac{K}{R^2} & (\lambda_7^2 - \nu) \frac{K}{R^2} & (\lambda_8^2 - \nu) \frac{K}{R^2} \\ (H_{A,3}\lambda_3 + H_{B,3}\nu + \nu) \frac{D}{R} & (H_{A,4}\lambda_4 + H_{B,4}\nu + \nu) \frac{D}{R} & (H_{A,7}\lambda_7 + H_{B,7}\nu + \nu) \frac{D}{R} & (H_{A,8}\lambda_8 + H_{B,8}\nu + \nu) \frac{D}{R} \\ [\lambda_3^3 - (2 - \nu)\lambda_3] \frac{K}{R^3} & [\lambda_4^3 - (2 - \nu)\lambda_4] \frac{K}{R^3} & [\lambda_7^3 - (2 - \nu)\lambda_7] \frac{K}{R^3} & [\lambda_8^3 - (2 - \nu)\lambda_8] \frac{K}{R^3} \\ (H_{B,3}\lambda_3 - H_{A,3} + 2k\lambda_3) \frac{D}{2R} & (H_{B,4}\lambda_4 - H_{A,4} + 2k\lambda_4) \frac{D}{2R} & (H_{B,7}\lambda_7 - H_{A,7} + 2k\lambda_7) \frac{D}{2R} & (H_{B,8}\lambda_8 - H_{A,8} + 2k\lambda_8) \frac{D}{2R} \\ H_{A,3}e^{\lambda_3\alpha} & H_{A,4}e^{\lambda_4\alpha} & H_{A,7}e^{\lambda_7\alpha} & H_{A,8}e^{\lambda_8\alpha} \\ H_{B,3}e^{\lambda_3\alpha} & H_{B,4}e^{\lambda_4\alpha} & H_{B,7}e^{\lambda_7\alpha} & H_{B,8}e^{\lambda_8\alpha} \\ e^{\lambda_3\alpha} & e^{\lambda_4\alpha} & e^{\lambda_7\alpha} & e^{\lambda_8\alpha} \\ \lambda_3e^{\lambda_3\alpha} & \lambda_4e^{\lambda_4\alpha} & \lambda_7e^{\lambda_7\alpha} & \lambda_8e^{\lambda_8\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{D}_M = N \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1-\nu^2}{R} \frac{K}{R^2} & 0 & -\nu \frac{K}{R^2} \\ 0 & \frac{1-\nu^2}{R} \frac{D}{R} & 0 & 0 \\ \frac{5-\nu^2}{R} \frac{K}{R^3} & 0 & -(2-\nu) \frac{K}{R^3} & 0 \\ \frac{D}{2R} \left[\frac{2(1+\nu)}{R} - k \frac{2(2+\nu)}{R} \right] & 0 & \frac{D}{2R} 2k & 0 \\ -\frac{\alpha^2}{2R} & \frac{\alpha}{R} & -1 & 0 \\ -\frac{\alpha^3}{6R} + \frac{\alpha}{R} 2(1+\nu) & \frac{\alpha^2}{2R} & -\alpha & -1 \\ \frac{\alpha^3}{6R} - \frac{\alpha}{R} (2+\nu) & -\frac{2\nu+\alpha^2}{2R} & \alpha & 1 \\ \frac{\alpha^2}{2R} - \frac{2+\nu}{R} & -\frac{\alpha}{R} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Für die Randlastfälle 4 und 5:

$$\mathbf{D}_B = \frac{K}{R^2} \begin{bmatrix} \lambda_3^2 - \nu & \lambda_4^2 - \nu & \lambda_7^2 - \nu & \lambda_8^2 - \nu \\ [\lambda_3^3 - (2 - \nu)\lambda_3] \frac{1}{R} & [\lambda_4^3 - (2 - \nu)\lambda_4] \frac{1}{R} & [\lambda_7^3 - (2 - \nu)\lambda_7] \frac{1}{R} & [\lambda_8^3 - (2 - \nu)\lambda_8] \frac{1}{R} \\ (\lambda_3^2 - \nu)e^{\lambda_3\alpha} & (\lambda_4^2 - \nu)e^{\lambda_4\alpha} & (\lambda_7^2 - \nu)e^{\lambda_7\alpha} & (\lambda_8^2 - \nu)e^{\lambda_8\alpha} \\ [\lambda_3^3 - (2 - \nu)\lambda_3] \frac{1}{R} e^{\lambda_3\alpha} & [\lambda_4^3 - (2 - \nu)\lambda_4] \frac{1}{R} e^{\lambda_4\alpha} & [\lambda_7^3 - (2 - \nu)\lambda_7] \frac{1}{R} e^{\lambda_7\alpha} & [\lambda_8^3 - (2 - \nu)\lambda_8] \frac{1}{R} e^{\lambda_8\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

B.2.4 Bestimmung der Übergangsschnittgrößen

Die Amplitude der Übergangsschnittgrößen ergibt sich aus den Verformungsbedingungen an der Schnittstelle der Teilschalen. An der Schnittstelle müssen die radialen Verschiebungen des unteren und oberen Schalenteils übereinstimmen: $w_u = w_o$. Weiterhin ist die Verdrehung der Meridiantangenten $w'_u = \frac{\partial w_u}{\partial \xi} \frac{1}{H}$ und $w'_o = \frac{\partial w_o}{\partial \xi} \frac{1}{H}$ zu berücksichtigen. Die Verschiebungen und Verdrehungen des unteren Schalenteils setzen sich aus den Anteilen infolge des Randmoments ($w_{u,m}$, $w'_{u,m}$), der Randquerkraft ($w_{u,q}$, $w'_{u,q}$) und der Ringlast ($w_{u,p}$, $w'_{u,p}$) zusammen. Für die Verschiebungen und Verdrehungen des oberen Schalenteils sind die auftretenden Starrkörperbewegungen zu beachten. Sie ergeben sich aus den Membranverschiebungen der unteren Teilschale. Die Starrkörperbewegungen setzen sich aus einer Verdrehung und einer Horizontal- und Vertikalverschiebungen zusammen. Die Starrkörperverdrehungen ϕ wird aus den antimetrischen axialen Membranverschiebungen $u_{M,u}$ des unteren Schalenteils an der Schnittstelle ($\xi = 0$) bestimmt. Aus ihr resultieren ebenfalls radiale und Umfangsverschiebungen des oberen Schalenteils.

$$\phi = \frac{u_u}{R}$$

Die horizontale Starrkörperverschiebung des oberen Schalenteils $w_{S,o}$ wird aus der radialen Membranverformung des unteren Schalenteils an der Schnittstelle $\xi = 0$ ermittelt:

$$w_{S,o} = w_{M,u} \big|_{\xi=0}$$

Die Verschiebungen sind positiv nach außen und die Verdrehungen sind positiv im Uhrzeigersinn. Für die Verschiebungen und Verdrehungen ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} w_o &= m w_{m,o} - q w_{q,o} + w_{S,o} + \phi \xi H_o & w_u &= m w_{m,u} + q w_{q,u} + w_p \\ w'_o &= m w'_{m,o} - q w'_{q,o} + \phi & w'_u &= m w'_{m,u} + q w'_{q,u} + w_p \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Daraus läßt sich das folgende Gleichungssystem für die Bestimmung der beiden Paare von Übergangsschnittgrößen $m_x \Leftrightarrow n_x$ und $q_x \Leftrightarrow n_{\varphi x}$ ableiten:

$$\begin{bmatrix} w_{m,o} - w_{m,u} & w_{q,o} + w_{q,u} \\ -w'_{m,o} - w'_{m,u} & w'_{q,o} - w'_{q,u} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_p \\ w'_p - \phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Bezeichnungen

Bezeichnungen Zylinderschale

z, φ, r	Zylinderkoordinaten
R	Radius
H	Höhe
r_0	Fundamentradius
d	Dicke der Schale
$\xi = z/H$	bezogene Höhe
$\zeta = r/R$	bezogener Radius
$\alpha = \frac{H}{R}$	Schlankheit
$\eta = \frac{R}{d}$	normierter Radius
E	Elastizitätsmodul
f_y	Fließspannung des Mantelstahls
ν	Querdehnzahl
ρ	Dichte
$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	Kompressionswellengeschwindigkeit des Schalenmaterials
$K = \frac{Ed}{12(1-\nu^2)}$	Biegesteifigkeit
$D = \frac{Ed}{1-\nu}$	Dehnsteifigkeit
$k = \frac{K}{DR^2} = \frac{d^2}{12R^2}$	Behälterkennzahl
$\mathbf{U} = (U \ V \ W)^T$	Verschiebungen in axialer, Umfangs- und radialer Richtung
$\mathbf{v}_{m,n} = (v_{m,n} \ \chi_{m,n} \ \psi_{m,n})^T$	n-te Biegeeigenfunktion für die m-te Umfangsharmonische in axialer, Umfangs- und radialer Richtung
$\omega_{m,n}$	n-te Eigenfrequenz in der m-ten Umfangsharmonischen
$m_\varphi, \ m_z, \ m_{z,\varphi}$	Ringmoment, Meridianmoment, Drillmoment
$n_\varphi, \ n_z, \ n_{\varphi,z}$	Meridiankraft, Ringkraft, Schubkraft
$q_\varphi, \ q_z$	Ringquerkraft, Meridianquerkraft
λ	Nullstellen der charakteristischen Gleichung der Zylinderschale

Bezeichnungen Flüssigkeit, Index "L"

z, φ, r	Zylinderkoordinaten
ρ_L	Dichte
μ_L	dynamische Viskosität

$\nu_L = \frac{\mu_L}{\rho_L}$	kinematische Viskosität
c_L	Schallgeschwindigkeit
δ_L	Eindringtiefe der Scherströmung der viskosen Flüssigkeit
Φ	skalares Potential für die Flüssigkeitgeschwindigkeit
$\mathbf{v} = (v_z \ v_\varphi \ v_r)^T$	Flüssigkeitgeschwindigkeit
$\mathbf{u}_L = (u_L \ v_L \ w_L)^T$	Verschiebungen der Flüssigkeit in axialer, Umfangs- und radialer Richtung
p	Druck
\bar{p}	normierter Druck
$\mu_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$	Hilfsgröße für das Flüssigkeitspotential
$\varepsilon_{m,n}$	n-te Nullstelle der Ableitung der Besselfunktion erster Art und der Ordnung m

Bezeichnungen Untergrund, Index "S"

r, φ, z	Zylinderkoordinaten
E_S	Elastizitätsmodul
$G_S = \frac{E_S}{2(1+\nu_S)}$	Schubmodul
$v_S = \sqrt{\frac{G_S}{\rho_S}}$	Scherwellengeschwindigkeit
$v_P = \sqrt{\frac{2(1-\nu_S)}{1-2\nu_S}} \sqrt{\frac{G_S}{\rho_S}}$	Kompressionswellengeschwindigkeit
ρ_S	Dichte
ν_S	Querdehnzahl
u_S, w_S	horizontale bzw. vertikale Verschiebung der Untergrundoberfläche

Bezeichnungen Kreisfundament, Index "F"

r, φ	Polarkoordinaten
r_0	Fundamentradius
d_F	Fundamentdicke
M_F	Fundamentmasse
I_F	Trägheitsmoment
E_F	Elastizitätsmodul
ν_F	Querdehnzahl
$K_F = \frac{E_F d_F}{12(1-\nu_F^2)}$	Biegesteifigkeit
$\delta = \frac{K_F}{G_S r_0}$	bezogene Fundamentsteifigkeit
$B = \frac{1-\nu_S}{4} \frac{M_F}{\rho_S r_0^3}$	bezogene Fundamentmasse
$B = \frac{3(1-\nu_S)}{8} \frac{I_F}{\rho_S r_0^5}$	bezogenes Fundamentwiderstandsmoment
w_F	Fundamentdurchbiegung
ϕ_F	Fundamentverdrehung

Ersatzsystem für das Behälter-Flüssigkeit-Kontinuum

$M_L = \rho_L \pi R^2 H$	Gesamtmasse der Flüssigkeit
--------------------------	-----------------------------

$\omega_{SL,n}, \omega_{DV,n}, \omega_{DH,n}$	Eigenkreisfrequenz der Schwappschwingung bzw. der gemeinsamen Schwingung von Flüssigkeit und Schale in der 0. und 1. Umfangsharmonischen im n-ten Mode
$\kappa_{SL,n}, \kappa_{DV,n}, \kappa_{DH,n}$	Dämpfungsmaß der Schwappschwingung bzw. der gemeinsamen Schwingung von Flüssigkeit und Schale in der 0. und 1. Umfangsharmonischen im n-ten Mode
$M_{SL,n}, M_{DV,n}, M_{DH,n}$	aktivierte Flüssigkeitsmasse in der Schwappschwingung bzw. in der gemeinsamen Schwingung von Flüssigkeit und Schale in der 0. und 1. Umfangsharmonischen im n-ten Mode
$MM_{WSL,n}, MM_{WDH,n}$ $H_{WSL,n}, H_{WDH,n}$	Momente aus der antimetrischen Druckverteilung auf die Behälterwand in der Schwappschwingung bzw. in der gemeinsamen Schwingung von Flüssigkeit und Schale im n-ten Mode und zugeordnete Höhenordinate der resultierenden horizontalen Kraft
$MM_{BSL,n}, MM_{BDH,n}$ $H_{BSL,n}, H_{BDH,n}$	Momente aus der antimetrischen Druckverteilung auf den Behälterboden in der Schwappschwingung bzw. in der gemeinsamen Schwingung von Flüssigkeit und Schale im n-ten Mode und zugeordnete Höhenordinate der resultierenden horizontalen Kraft
M_{BH}	aktivierte Flüssigkeitsmasse bei horizontaler Starrkörperbewegung der Flüssigkeit und des Behälters
MM_{WBH}, MM_{BBH} H_{WBH}, H_{BBH}	Momente aus der antimetrischen Druckverteilung auf die Behälterwand und den Behälterboden bei Starrkörperbewegung und zugeordnete Höhenordinaten der resultierenden horizontalen Kraft
$k_{DV,n} = \omega_{DV,n}^2 M_{DV,n}$	Federkennzahl für die gemeinsame Schwingung von Flüssigkeit und Zylinderschale in der 0. Umfangsharmonischen im n-ten Mode
$k_{DH,n} = \omega_{DH,n}^2 M_{DH,n}$	Federkennzahl für die gemeinsame Schwingung von Flüssigkeit und Zylinderschale in der 1. Umfangsharmonischen im n-ten Mode
$k_{SL,m} = \omega_{SL,m}^2 M_{SL,m}$	Federkennzahl für die Schwappschwingung der Flüssigkeit in der 1. Umfangsharmonischen im m-ten Mode
$c_{DV,n} = 2\kappa_{DV,n} M_{DV,n} \omega_{DV,n}$	Dämpfung der gemeinsame Schwingung von Flüssigkeit und Zylinderschale in der 0. Umfangsharmonischen im n-ten Mode
$c_{DH,n} = 2\kappa_{DH,n} M_{DH,n} \omega_{DH,n}$	Dämpfung der gemeinsame Schwingung von Flüssigkeit und Zylinderschale in der 1. Umfangsharmonischen im n-ten Mode
$c_{SL,n} = 2\kappa_{SL,n} M_{SL,n} \omega_{SL,n}$	Dämpfung der Schwappschwingung der Flüssigkeit in der 1. Umfangsharmonischen im n-ten Mode
$\Gamma_{m,n}$	Modupartizipationsfaktor des n-ten Biegemodes und der m-ten Umfangsharmonischen

Ersatzsystem für das Fundament-Boden-Kontinuum

$K_V = K_v [k_v(a_0) + ia_0 c_v(a_0)]$	Impedanzfunktion vertikale Anregung
$K_H = K_h [k_h(a_0) + ia_0 c_h(a_0)]$	Impedanzfunktion horizontale Anregung
$K_R = K_r [k_r(a_0) + ia_0 c_r(a_0)]$	Impedanzfunktion Momentenanregung
$K_{RH} = K_{rh} [k_{rh}(a_0) + ia_0 c_{rh}(a_0)]$	Impedanzfunktion Kopplung von horizontaler und Momentenanregung
$K_v = \frac{4G_s r_0}{1-\nu_s}$	statische Steifigkeit starres Kreisfundament, vertikale Last
$K_h = \frac{8G_s r_0}{2-\nu_s}$	statische Steifigkeit starres Kreisfundament, horizontale Last
$K_R = \frac{8G_s r_0^3}{3(1-\nu_s)}$	statische Steifigkeit starres Kreisfundament, Momentenbeanspruchung
$K_{rh} = \frac{8G_s r_0^3}{2-\nu_s}$	statische Steifigkeit starres Kreisfundament, Kopplung Moment und horizontale Last
k_v, k_h, k_r, k_{rh}	frequenzabhängige Federsteifigkeiten
c_v, c_h, c_r, c_{rh}	frequenzabhängige Dämpfung

gekoppeltes Gesamtsystem bzw. äquivalentes Ersatzsystem

$\beta_{DV,1}, \beta_{DH,1}$	Änderung der Eigenfrequenz des äquivalenten Ersatzsystems $\omega_{DV,1}$ bzw. $\omega_{DH,1}$ infolge der Interaktion von Behälter und Boden
$\kappa_{R,1}$	Abstrahlungsdämpfung infolge der Interaktion von Behälter und Boden für den ersten Mode des gekoppelten Systems
$\bar{\kappa}_{R,1}$	Ersatzdämpfung für das äquivalenten Ersatzsystems zur Erfassung der Abstrahlungsdämpfung
$\bar{\omega}_{DV,1}, \bar{\omega}_{DH,1}$	Ersatzfrequenz für den ersten Modes des starr gelagerten äquivalente Ersatzsystems
$\bar{\kappa}_{DV,1}, \bar{\kappa}_{DH,1}$	Ersatzdämpfung für den ersten Modes des starr gelagerten äquivalente Ersatzsystems

mathematische Bezeichnungen

$i = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit
J_m	Besselfunktion erster Art der Ordnung m
Y_m	Besselfunktion zweiter Art der Ordnung m
I_m	modifizierte Besselfunktion erster Art der Ordnung m
K_m	modifizierte Besselfunktion zweiter Art der Ordnung m
$\varepsilon_{m,n}$	n-te Nullstelle der Besselfunktion erster Art der Ordnung m

weitere Größen

t	Zeit
Ω	Erregerkreisfrequenz
$a_0 = \frac{\Omega r_0}{v_s}$	dimensionslose Frequenz

$\eta_{m,n} = \frac{\Omega}{\omega_{m,n}}$	Verhältnis Erregerfrequenz zu Eigenfrequenz im n-ten Mode der m-ten Umfangsharmonischen
F	Kraft
$a_z / a_x / a_y$	Freifeldbeschleunigung in z,x und y-Richtung
$S_{a,z} / S_{a,x}$	Spektralbeschleunigung in z und x-Richtung
$S_{a,DV,n}$	Spektralbeschleunigung für den n-ten Biegemode und die 0. Umfangsharmonische der Interaktions-schwingung von Flüssigkeit und Schale
$S_{a,SL,m}$	Spektralbeschleunigung für den m-ten Mode und die 1. Umfangsharmonische der Schwappschwin-gung
$S_{a,DH,n}$	Spektralbeschleunigung für den n-ten Biegemode und die 1. Umfangsharmonische der Interaktions-schwingung von Flüssigkeit und Schale
g	Erdbeschleunigung
$(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial \varphi}$	Ableitung in Umfangsrichtung
$(\cdot)' = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi}$	Ableitung in axialer Richtung
$(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}$	Ableitung nach der Zeit

Weitere hier nicht aufgeführte Bezeichnungen erschließen sich aus dem textlichen Zusammenhang.

Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMSON, H.N.: *The dynamic behavior of liquids in moving containers*. NASA SP-106, 1966.
- [2] AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE, Washington D.C.: *API Standard 650, Welded Steel Tanks for Oil Storage*, 7. edition, 1980.
- [3] AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE, Washington D.C.: *API Standard 620, Recommended Rules for Design and Construction of Large, Welded, Low-Pressure Storage Tanks*, 7. edition, 1982.
- [4] ASSOCIATION, AMERICAN WATER WORKS: *AWWA Standards for Welded Steel Tanks for Water Storage*. ANSI/AWWA D-100-84, American Water Works Association, Denver, 1984.
- [5] BETTIN, I., J. C. URRUTIA-GALICIA, and N. GEBBEKEN: *On the analysis of vertical cylindrical tanks under earthquake excitation at its base*. Technical Report 2, Universität der Bundeswehr München, February 2000.
- [6] BOHN, W. und J. SCHWARZ: *Verhalten rotationssymmetrischer Bauwerke unter seismischen Einwirkungen*. Doktorarbeit, Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, 1984.
- [7] BYCROFT, G.N.: *Forced vibrations of a rigid circular plate on a semiinfinite elastic space and on an elastic stratum*. Philosophical Transactions Of The Royal Society Of London, A. 248(948):327–368, January 1956.
- [8] DAVIDOVICI, V. and A. HADDADI: *Calcul pratique de reservoirs en zone sismique*. Technical Report 409, Institute du Batiment et des Travaux Publics, November 1982.
- [9] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG, BRD: *DIN 4119, Teil 1 und 2, Oberirdische zylindrische Flachboden-Tankbauwerke aus metallischen Werkstoffen*, 1977.
- [10] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG, BRD: *DIN 18800, Teil 1: Stahlbauten - Konstruktion und Bemessung*, 1990.
- [11] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG, BRD: *DIN 18800, Teil 4: Stahlbauten - Stabilitätsfälle, Schalenbeulen*, 1990.
- [12] EPSTEIN: *Tanks*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 18(4):117–134, 1960.
- [13] EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, Brüssel, Belgium: *Eurocode 8, Part 1: Design of structures for earthquake resistance: General rules*, January 1998.
- [14] EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, Brüssel, Belgium: *Eurocode 8, Part 4: Design of structures for earthquake resistance: Silos, tanks and pipelines*, January 1998.
- [15] FISCHER, D.: *Dynamic fluid effects in liquid-filled flexible cylindrical tanks*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 7:587–601, 1979.
- [16] FISCHER, F.: *Zur Dynamik von Rotationsschalen in flüssigen Medien*. Doktorarbeit, Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Weimar, 1981.

-
- [17] FISCHER, F.D. und F.G. RAMMERSTORFER: *The Stability of Liquid-Filled Cylindrical Shells under Dynamic Loading*. In: RAMM, E. (Herausgeber): *Buckling of Shells*, Seiten 569–597. Springer, Berlin, 1982.
 - [18] FISCHER, K.: *Beispiele zur Bodenmechanik*. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1. Auflage, 1965.
 - [19] FLÜGGE, W.: *Statik und Dynamik der Schalen*. Springer-Verlag, Reprint 1981.
 - [20] GAS, COMMITTEE ON and LIQUID FUEL LIFELINES OF THE ASCE TECHNICAL COUNCIL ON LIFELINE EARTHQUAKE ENGINEERING: *Guidelines for the Seismic Design of Oil and Gas Pipeline Systems*. American Society of Civil Engineers, New York, 1983.
 - [21] GAZETAS, G.: *Analysis of machine foundation vibrations: state of the art*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2(1), 1983.
 - [22] HABENBERGER, J.: *Verhalten von Flüssigkeitsbehältern unter seismischen Einwirkungen: Analyse von Schadensfällen*. Diplomarbeit, Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar-Universität, Fakultät Bauingenieurwesen, Professur Planung von Ingenieurbauwerken, 1995.
 - [23] HAGEDORN, P.: *Technische Schwingungslehre*, Band 1 und 2. Springer-Verlag, 1. Auflage, 1989.
 - [24] HAMPE, E.: *Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke*, Band 2, Zylinderschale. Verlag für Bauwesen, DDR, 1965.
 - [25] HAMPE, E.: *Flüssigkeitsbehälter*, Band 1 und 2. W. Ernst & Sohn, 1. Auflage, 1980.
 - [26] HAMPE, E.: *Betonkalender*, Band II, Kapitel D Flüssigkeitsbehälter, Seiten 671–833. W. Ernst & Sohn, 1986.
 - [27] HAMPE, E., B. KABALAN, J. SCHWARZ, W. WUNDERLICH und C. SEILER: *Druckzustände in Flüssigkeitstanks unter Berücksichtigung der regionalen Spezifik seismischer Einwirkungen*. In: KERNBICHLER, K. (Herausgeber): *Aktuelle Probleme des Erdbebeningenieurwesens und der Bau-dynamik*, D-A-CH Tagung, TU Graz, 1995.
 - [28] HAMPE, E., W. WUNDERLICH, H. CRAMER, B. KABALAN, J. SCHWARZ und C. SEILER: *Berechnung von Behälter- und Silotragwerken unter seismischen Einwirkungen*. Technischer Bericht, TU München Bauhaus-Universität Weimar, 1996. 1. Arbeitsbericht zum DFG Forschungsvorhaben Wu 67/24-1 und Ha 1839/1-1.
 - [29] HAROUN, M.A.: *Dynamic Analysis of Liquid Storage Tanks*. PhD thesis, Caltech. Pasadens, USA, 1980. Rep. No. EERL 80-04.
 - [30] HAROUN, M.A. and W. ABOU-IZZEDINE: *Parametric study of seismic soil-tank interaction. i: Horizontal excitation*. Journal of Structural Engineering, 118(3):783–797, March 1992.
 - [31] HAROUN, M.A. and W. ABOU-IZZEDINE: *Parametric study of seismic soil-tank interaction. ii: Vertical excitation*. Journal of Structural Engineering, 118(3):798–812, March 1992.
 - [32] HAROUN, M.A. and G.W. HOUSNER: *Earthquake response of deformable liquid storage tanks*. Journal of Applied Mechanics, 48:411–418, June 1981.
 - [33] HOUSNER, G.W.: *Dynamic pressures on accelerated fluid containers*. Bulletin Seismological Society America, 47(1):15–35, 1955.
 - [34] KANY, M.: *Berechnung von Flächengründungen*. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 2. Auflage, 1974.
 - [35] KRINGS, W. und H. WALLER: *Zur Berechnung von Bauwerksschwingungen bei Kernkraftwerken*. Bauingenieur, 54:291–298, 1979.

-
- [36] LAMB, H.: *Hydrodynamics*. Dover Publications, New York, 6 edition, 1945.
 - [37] LANDAU, L.D. und E.M. LIFSCHITZ: *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band VI Hydrodynamik. Akademie-Verlag, Berlin, 1. Auflage, 1966.
 - [38] LATZ, K.: *Dynamische Interaktion von Flüssigkeitsbehältern und Baugrund*. Doktorarbeit, TU Braunschweig, BRD, 1994.
 - [39] LIOU, G.-S. and P.-H. HUANG: *Effect of flexibility on impedance functions for circular foundations*. Journal of Engineering Mechanics, 120:1429–1446, July 1974.
 - [40] LUFT, R.W.: *Vertical accelerations in prestressed concrete tanks*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 110:706–713, 1984.
 - [41] LYSMER, J.: *Vertical Motion of Rigid Footings*. PhD thesis, University of Michigan, Jun 1965.
 - [42] MAIWALD, H.: *Erfassung des Verhaltens nachgiebig gelagerter Behältertragwerke unter seismischen Einwirkungen*. Diplomarbeit, Bauhaus-Universität Weimar, Fakultät Bauingenieurwesen, Professur Planung von Ingenieurbauwerken, 1999.
 - [43] MALHOTRA, P.K.: *Base uplift analysis of flexibly supported liquid-storage tanks*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 24:1592–1607, 1995.
 - [44] MALHOTRA, P.K.: *Seismic analysis of liquid-storage tanks*. Structural Engineering International, 1997.
 - [45] MARKUS, G.: *Kreis- und Kreisringplatten unter periodischer Belastung*. Werner Verlag Düsseldorf, 1 Auflage, 1985.
 - [46] MEINL, H.: *Experimentelle Untersuchungen zum Schwingungsverhalten dünner elastischer Kreiszylinderschalen bei Wechselwirkung mit Medien*. Doktorarbeit, Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Weimar, 1982.
 - [47] MILES, J.W.: *On the sloshing of liquid in a flexible tank*. Applied Mechanics Division, pages 277–283, 1958.
 - [48] MILES, J.W.: *Ring damping of free surface oscillations in a circular tank*. Applied Mechanics Division, pages 274–276, 1958.
 - [49] PARKUS, H.: *Überschwappwahrscheinlichkeit für einen Flüssigkeitsbehälter unter Erdbebeneinwirkung*. Ingenieur-Archiv, 49:179–185, 1980.
 - [50] REISSNER, E.: *Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes*. Ingenieur-Archiv, VII:381–396, 1936.
 - [51] RIEDEL, C.: *Verhalten von seismisch beanspruchten Tragwerken unter Berücksichtigung der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung*. Doktorarbeit, Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Weimar, 1990.
 - [52] SCHÄFER, CL.: *Einführung in die theoretische Physik*, Band 1. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin, 5. Auflage, 1950.
 - [53] SCHÄPERTÖNS, B.: *Über die Wellenausbreitung im Baugrund und deren Einfluß auf das Tragverhalten von flüssigkeitsgefüllten Behältern*. Doktorarbeit, TU München, 1996.
 - [54] SCHARF, K.: *Beiträge zur Erfassung des Verhaltens von erdbebenerregten, oberirdischen Tankbauwerken*. Doktorarbeit, Universität Wien, Österreich, 1989.
 - [55] SCHIFFNER, K.: *Erdbebenenerregte Schwingungen in Flüssigkeitstanks*. VDI-Berichte, 419:129–138, 1981.

-
- [56] SCHMEIDLER, W.: *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1. Auflage, 1950.
 - [57] SCHWARZ, J. and J. HABENBERGER: *Tank damage during the cariacó (Venezuela) earthquake July 1997 - evaluation of critical pressure distributions*. In *19th European Regional Earthquake Engineering Seminar*, Cairo, Egypt, December 1997.
 - [58] SCHWARZ, J., J. HABENBERGER, W. WUNDERLICH, and C. SEILER: *Critical loading conditions of anchored liquid storage tanks under earthquake excitation*. In A. PECKER, P. BISCH, P. LABBE, (editor): *11th European Conference on Earthquake Engineering*, Paris, France, 1998. Balkema Rotterdam, 1998.
 - [59] SCHWARZ, J., D. LANG, and J. HABENBERGER E.A.: *The cariacó, Venezuela, earthquake of July 09, 1997: engineering analysis of structural damage*. In A. PECKER, P. BISCH, P. LABBE, (editor): *11th European Conference on Earthquake Engineering*, Paris, France, 1998. Balkema Rotterdam.
 - [60] SEEGER, R.: *Das dynamische Verhalten fernerregter flüssigkeitsgefüllter Tankbauwerke auf elastischem Untergrund*. Doktorarbeit, Montanuniversität Leoben, Leoben, Österreich, 1988.
 - [61] SEILER, C.: *Näherungsmethoden zur Stabilitätsuntersuchung von erdbebeneregtten verankerten Flüssigkeitsbehältern*. Doktorarbeit, TU München, 2000.
 - [62] SIEFFERT, J.-G. and F. CEVAER: *Handbook of Impedance Functions*. Quest Editions, Press Academiques, 1. edition, 1991.
 - [63] SMOLTCZYK, U. (Herausgeber): *Grundbautaschenbuch*, Band 3. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 5 Auflage, 1997.
 - [64] SMOTZCIK (Herausgeber): *Grundbautaschenbuch*, Band 1. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 5 Auflage, 1997.
 - [65] SOMMERFELD, A.: *Vorlesungen über theoretische Physik*, Band 1,2,6. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M., Reprint 1988 bis 1994.
 - [66] SPUNGALA, H.: *Näherungsweise Berechnung der freien Schwingung von teilweise flüssigkeitsumgebenen Kreiszyinderschalen*. Doktorarbeit, Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Weimar, 1982.
 - [67] TANG, Y.: *Studie of Dynamic Response of Liquid Storage Tanks*. PhD thesis, Rice University, Houston, Texas, April 1986.
 - [68] TEMME, C.: *Numerische Behandlung der Interaktionseffekte von erdbebeneregtten, unverankerten Flüssigkeitsbehältern*. Doktorarbeit, TU München, 1995.
 - [69] THE MATHWORKS, INC.: *MATLAB Release 11*, 1999.
 - [70] VELETSOS, A.S.: *Seismic effects in flexible liquid storage tanks*. In *5th World Conference Earthquake Engineering*, pages Vol. I, 630–639, Rome, Italy, 1974.
 - [71] VELETSOS, A.S. and A. KUMAR: *Dynamic response of vertically excited liquid storage tanks*. In *8th World Conference on Earthquake Engineering*, volume 2, pages 453–460, San Francisco, Calif., 1984.
 - [72] VELETSOS, A.S. and Y. TANG: *Dynamics of vertically excited liquid storage tanks*. *Journal of Structural Engineering*, 112(6):1228–1246, June 1986.
 - [73] VELETSOS, A.S. and Y. TANG: *Rocking response of liquid storage tanks*. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(11):1774–1792, November 1987.

-
- [74] VELETSOS, A.S. and Y. TANG: *Soil structure interaction effects for laterally excited liquid storage tanks*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 19:473–496, 1990.
 - [75] VELETSOS, A.S. and Y. TANG: *Dynamic response of flexibly supported liquid storage tanks*. Journal of Structural Engineering, 118(1):264–283, 1992.
 - [76] VELETSOS, A.S. and B. VERBIC: *Basic response functions for elastic foundations*. Journal of Engineering Mechanics Division, 100:189–202, April 1974.
 - [77] VELETSOS, A.S. and Y.T. WEI: *Lateral and rocking vibration of footings*. Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, 97:1227–1248, September 1972.
 - [78] WOLF, J.P.: *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N-J. 07632, 1. edition, 1985.
 - [79] WUNDERLICH, W. and M. RAPOLDER: *Numerical treatment of the dynamic soil-structure-fluid interaction of unanchored liquid storage tanks*, 1998.
 - [80] WUNDERLICH, W., J. SCHWARZ, C. SEILER und J. HABENBERGER: *Berechnung von Behälter- und Silotragwerken unter seismischen Einwirkungen*. Technischer Bericht, TU München Bauhaus-Universität Weimar, 1996. Abschlußbericht zum DFG Forschungsvorhaben Wu 67/24-4 und Ha 1839/1-3.
 - [81] WUNDERLICH, W. and C. SEILER: *Nonlinear Treatment of Liquid-filled Storage Tanks under Earthquake Excitation by a Quasistatic Approach*. In TOPPING, B.H.V. (editor): *Advances in Computational Structural Mechanics*. Civil-Comp Press, 1998, 1998.
 - [82] WUNDERLICH, W., C. SEILER, E. HAMPE, J. SCHWARZ und B. KABALAN: *Einfluß des Bodens auf das Tragverhalten erdbebeneregter Flüssigkeitstanks*. In: ZROST, H., BURKHARDT, G. (Herausgeber): *Baustatik/Baupraxis - Tagungsband BB6*, Bauhaus-Universität Weimar, 1996.
 - [83] WUNDERLICH, W., C. SEILER, J. SCHWARZ, and J. HABENBERGER: *Seismic response and failure mechanism of flexibly supported liquid storage tanks*. In *12th World Conference on Earthquake Engineering*, volume 1, Auckland, New Zealand, 1999.
 - [84] WUNDERLICH, W., C. SEILER, J. SCHWARZ und J. HABENBERGER: *Berechnung von Behälter- und Silotragwerken unter seismischen Einwirkungen*. Technischer Bericht, TU München, Bauhaus-Universität Weimar, 2000. Abschlußbericht zum DFG Forschungsvorhaben Wu 67/24-4 und Ha 1839/1-3.
 - [85] WUNDERLICH, W., H. SPRINGER, and W. GOEBEL: *Discretization and Solution Techniques for Liquid Filled Shells of Revolution under Dynamic Loading*. In KUHN, G. and H. MANG (editors): *Discretization Methods in Structural Mechanics*, pages 145–155. Springer Verlag, 1989.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quellen gekennzeichnet.

Weitere Personen waren an der inhaltlich-materiellen Erstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten (Promotionsberater oder anderer Personen) in Anspruch genommen. Niemand hat von mir unmittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Ich versichere an Eides Statt, daß ich nach bestem Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Vor Aufnahme der obigen Versicherung an Eides Statt wurde ich über die Bedeutung der eidesstattlichen Versicherung und die strafrechtlichen Folgen einer unrichtigen oder unvollständigen eidesstattlichen Versicherung belehrt.

Weimar, 01.02.2001

Jörg Habenberger

Tabellarischer Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Jörg Habenberger
Geburtsdatum:	01.03.1970
Geburtsort:	Naumburg / Saale
Staatsangehörigkeit:	BRD
Familienstand:	ledig

Berufs- und Bildungsweg

1976-1986:	Polytechnische Oberschule Naumburg
1986-1988:	Erweiterte Oberschule Schulpforta Abschluß: Abitur
1988-1990:	Armeedienst
1990-1995:	Studium des Bauingenieurwesens an der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar (Universität) Abschluß: Diplom-Ingenieur
1995-1997:	Mitarbeiter im Ingenieurbüro Kröhl, Naumburg
seit 1997:	wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Bauhaus-Universität Wei- mar, Fakultät Bauingenieurwesen, Professur Planung von Inge- nieurbauten